

Chaotische dynamiek in de economie: een introductie.

Frank de Langen*

"With light poise and counterpoise, Nature oscillates within her prescribed limits, yet thus arise all the varieties and conditions of the phenomena which are presented to us in space and time." Goethe, *Zür Farbelehre* (geciteerd door Gleick, 1987, 164).

Dynamiek in de macroeconomie wordt in het algemeen op twee manieren geanalyseerd. In de eerste plaats zijn er modellen die uitgaan van een exogene schok, waarna geanalyseerd wordt hoe de economie zich terug beweegt naar het oorspronkelijke lange termijn evenwicht, dan wel tendeert naar een nieuw lange termijn evenwicht. Voorbeelden hiervan zijn wisselkoers-"overshooting" modellen en "real business cycle"-modellen. Blijvende fluctuaties in "real business cycle"-modellen zijn alleen mogelijk als wordt voldaan aan specifieke vooronderstellingen, in welk geval zij vallen onder de exogene conjunctuurtheorieën. Een andere benadering wordt gekozen in conjunctuurtheorieën, die een verklaring geven voor blijvende fluctuaties rond een trend. Deze benadering is ook te verdelen in twee verschillende klassen van modellen. Exogene conjunctuurmodellen, waarin de oorzaak van de fluctuaties ligt in een exogene schok, die blijvende fluctuaties voortbrengt (zoals beschreven door Pigou's "propagationmechanism"; (Zie Kuyn, 1988, 30). Voorbeelden van dergelijke modellen zijn de Samuelson-Hicks accelerator-multipliermodellen, de voorraadtheorie van Meltzer, de investeringsgolf van Kalecki en de neokeynesiaanse conjunctuurmodellen, zoals in Malinvaud (1977) en Benassy (1986).

Endogene conjunctuurtheorieën gaan uit van een inherent instabiele economie. Aangezien de economie zich altijd in een staat van beweging bevindt is geen directe oorzaak van de fluctuaties aan te geven. De oorzaak van de neergang is besloten in de periode van voorspoed. Dergelijke beschrijvingen zijn te vinden in de onderconsumptie-theorie van Malthus, de (semi-) marxistische conjunctuurmodellen (bijvoorbeeld Foley, 1986), het predator-prey model van Goodwin (Goodwin, 1987) en in de conjunctuurcyclus-theorieën van Hawtrey en Hayek (Haberler, 1939).

Het onderscheid tussen exogene en endogene conjunctuurtheorieën wordt verder uitgewerkt in Gabisch en Lorenz (1989).

* Frank de Langen is werkzaam bij de Open universiteit te Heerlen. Hij bedankt Henk Peer en twee anonieme referenten voor hun commentaar op een eerdere versie van dit artikel. Ook Bernard Versteegen wordt bedankt voor de verschillende discussies over "chaos", micro-macro economie en methodologie.

Een probleem dat zich voordoet is dat, met name in de mathematische uitwerking van deze tweede groep theorieën, de amplitude en de periodiciteit van de golfbeweging niet varieert. Daarom is de endogene conjunctuurbenadering aangevallen vanuit de econometrische hoek. Al in de jaren dertig werd door Fisher en Slutsky aangetoond dat het mogelijk is om via willekeurige exogene schokken tijdreeksen te genereren die een grote gelijkheid vertoonden met de empirische data, zonder in te gaan op de economische verbanden. Gabisch en Lorenz (1989) geven een uitgebreide bespreking van de Fisher/Slutsky benadering en de door hun gebruikte modellen, (Zie ook Kuyn, 1988, 1). Met andere woorden, de afwijkingen van de lange termijn waarden worden veroorzaakt door stochastische verstoringen, zonder een expliciet verband tussen de opgaande en de dalende fase van de cyclus. De afwezigheid van regelmaat, zoals verondersteld door de stochastische benadering van de conjunctuurcyclus, geeft een verklaring voor de variabele lengte en intensiteit van de verschillende conjunctuurcycli zoals ook in de empirische data te zien is.

De keynesiaanse conjunctuurmodellen kunnen deels aan deze kritiek tegemoet komen door het toevoegen van een stochastische term aan het model. Hoewel de beschrijvende kracht van de modellen toeneemt, verbeteren de analytische en voorspellende waarde van de modellen niet door het toevoegen van een exogene (onvoorspelbare) gebeurtenis (Zie Gabisch en Lorenz, 1989, 88). Toch overheersten de keynesiaanse multiplier-accelerator-modellen de naoorlogse conjunctuuranalyse en daaruitvoortvloeiende beleidsadviezen. In de jaren zeventig ontstond als reactie op de keynesiaanse hegemonie de zogenaamde nieuw-klassieke school. Deze baseerde zich op de neoklassieke uitgangspunten zoals marktruiming via flexibele prijzen en nuts- en winstmaximalisatie. Het blijkt echter niet mogelijk in dergelijke Walrasiaanse modellen een verklaring te geven voor de waargenomen fluctuaties. Om fluctuaties te genereren is het nodig produktiviteitsschokken te veronderstellen (King en Plosser-modellen; zie onder andere King en Plosser, 1988), dan wel de veronderstelling van perfecte informatie los te laten (Lucas-modellen; zie onder andere Lucas, 1985).

Parallel aan de rationele verwachtingen revolutie werd in de economische theorievorming het idee van "chaotische nonlineariteit" geïntroduceerd. Dit concept is ontwikkeld als puur wiskundig idee (Zie bijvoorbeeld Gleick, 1987, waarin een beschrijving wordt gegeven van de introductie en de verspreiding van "chaos") maar heeft veel toepassingen gevonden in de fysica en biologie, waar het gebruikt wordt om bijvoorbeeld turbulentie en de groei van populaties te beschrijven en te verklaren. Analog aan het toepassen van het (van oorsprong biologische) 'Volterra-Lotka'-model in de jaren zestig in de economie om de conjunctuurcyclus te verklaren (Goodwin, 1987), wordt de chaostheorie toegepast om fluctuaties in economische variabelen te beschrijven.

"Chaotische vergelijkingen", zoals wij hier deze klasse van niet-lineaire vergelijkingen zullen noemen, zijn vergelijkingen die, gegeven zekere parameterwaarden, tijdreeksen genereren, die niet te onderscheiden zijn van tijdreeksen van willekeurige aard. Een meer formele omschrijving van het verschijnsel chaos is te vinden in de mathematische

inleidingen op dit gebied (bijvoorbeeld Thompson en Stewart, 1987 en Zaslavsky, 1985).

De "chaotische conjunctuuranalyse" komt dus tegemoet aan de kritiek van Fisher en Slutsky, dat economische tijdreeksen in het algemeen sterk lijken op stochastische reeksen. Zij verwerpt echter de conclusie dat het proces dat aan de tijdreeksen ten grondslag ligt stochastisch is. Integendeel, de reeksen zijn gebaseerd op een deterministisch proces.

Hieronder zal getoond worden dat het mogelijk is fluctuaties te verklaren, als gevolg van nutsmaximaliserend gedrag zonder de nieuw-klassieke veronderstelling van imperfecte informatie of technologische schokken. Het zal blijken dat dit afhankelijk is van de mate van risicoaversie van de individuen en de mate van factorsubstitutie.

Als uitgegaan wordt van onvolledige concurrentie is het mogelijk dat chaos voortkomt uit het gedrag van de ondernemingen. Een interessante implicatie van deze veronderstelling is dat het individueel gedrag chaotisch kan zijn, maar dat dit op ge-aggregeerd niveau niet waarneembaar is.

Een andere bron van chaos kan liggen in de manier waarop de investeringen gefinancierd worden. Deze bron van chaos wordt besproken in paragraaf 3.3. Tot slot zal in paragraaf 4 een chaotisch model gepresenteerd worden waarin sprake is van korte termijn fluctuaties (de Juglar) en lange termijn fluctuaties (de Kondratieff).

Deze modellen zullen worden geanalyseerd met behulp van de simpelste chaotische vergelijking, de "logistische vergelijking". De dynamiek van deze vergelijking is het onderwerp van paragraaf 2.

1 Chaotische dynamiek.

Om de totstandkoming van chaotische fluctuaties te illustreren beginnen wij deze paragraaf met een simpel voorbeeld.

Neem een ondernemer/arbeider, die een goed produceert dat als consumptiegoed en als investeringsgoed kan dienen (bijvoorbeeld graan). We veronderstellen dat de prijzen vast zijn. De productie (Y) is afhankelijk van de gebruikte hoeveelheid investeringsgoederen (kapitaal, k). De produktie-kapitaal verhouding ($a > 0$) wordt constant verondersteld:

$$Y_t = a \cdot k_t \quad (2.1)$$

Het kapitaalgoed wordt volledig verbruikt in het produktieproces. Verder wordt verondersteld dat de produktie negatieve externe effecten heeft (bijvoorbeeld bodemvervuiling), waardoor de overheid de produktie probeert af te remmen door het heffen van een belasting (T), proportioneel ($0 < b < 1$) aan het kwadraat van de produktie:

$$T_t = b \cdot Y_t^2 \quad (2.2)$$

Het inkomen van de ondernemer/arbeider bedraagt O_t (netto-opbrengsten: $Y - T$), waarvan zij een constant deel, $(1 - c)$, consumeert en een deel, c , opnieuw gebruikt voor produktie:

$$O_t = Y_t \cdot T_t \tag{2.3}$$

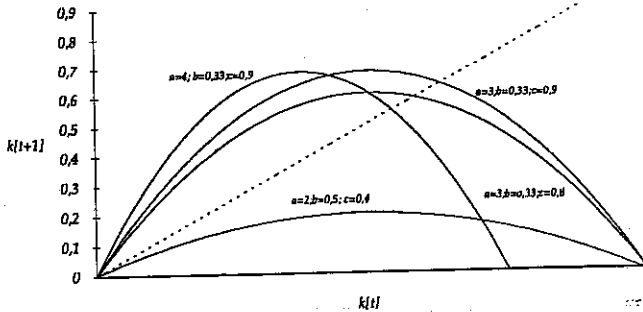
$$k_{t+1} = c \cdot O_t \tag{2.4}$$

Uit (2.1), (2.2), (2.3) en (2.4) kan een dynamische vergelijking voor k worden afgeleid:

$$k_{t+1} = cak_t(1-bak_t) \tag{2.5}$$

Als we veronderstellen dat de input in het productieproces niet negatief kan zijn ($k \geq 0$), dan ligt k tussen 0 en $(1/ba)$. Als de kwadratische vergelijking (2.5) uitgezet wordt in de (k_t, k_{t+1}) -ruimte zien we een bergparabool. Het verloop van de bergparabool (2.5) is het gevolg van de kwadratische belastingfunctie. Een toename van de productie doet de belastingverplichting (T) stijgen. Dit verklaart de heuvelvormige curve in figuur 1. Eerst zal de toename van de kapitaalgoederenvoorraad groter zijn dan de toename van de belastingverplichtingen, maar na een bepaald niveau van de kapitaalgoederenvoorraad zal de toename van de belastingverplichtingen de opbrengsten doen dalen, waardoor de toename van de kapitaalvoorraad zal afnemen, daarna zal doen dalen en tenslotte tot nul reduceren. Deze curve is in figuur 1 weergegeven voor verschillende waarden van a , b en c . Ook in deze figuur is de 45-graden lijn ($k_t = k_{t+1}$) weergegeven.

Figuur 1: Verschillende k_t, k_{t+1} -relaties



Zoals uit (2.5) is te berekenen heeft de 45-graden lijn twee mogelijke snijpunten met de andere curven:

$$k' = 0 \tag{2.6}$$

en

$$k^* = \{(ca-1)/(cba^2)\} \tag{2.7}$$

Deze punten zijn evenwichtspunten in de zin dat als k voldoet aan (2.6) of (2.7) de kapitaalvoorraad in de tijd constant blijft. Zoals in figuur 1 is te zien is het mogelijk dat in het eerste kwadrant slechts één snijpunt bestaat tussen (2.5) en de 45-graden lijn. Dit is het geval als $k^* \leq 0$. De reden hiervoor is eenvoudig. De kapitaalproduktiviteit (a) in relatie tot de "spaarquote" (c) is te laag (ofwel de consumptie is te hoog ten opzichte van de kapitaalproduktiviteit): $ca \leq 1$. Dit is als volgt te beredeneren. Een gegeven beginniveau van k leidt tot een zekere productie. Van deze productie wordt een deel afgedragen aan de overheid. De resterende productie wordt deels geconsumeerd, deels gebruikt voor de productie in de volgende periode. Uit (2.5) is duidelijk dat, als $ca \leq 1$, de kapitaalgoederenvoorraad in de volgende periode lager is dan in de voorafgaande periode: uiteindelijk daalt de kapitaalgoederenvoorraad (en de productie) naar nul. Zoals in (2.7) te zien is, is dit onafhankelijk van de hoogte van de belastingquote (b), maar alleen afhankelijk van de produktietechniek en de preferenties ten opzichte van consumptie en sparen.

Als de kapitaalproduktiviteit of de spaarquote groter zijn, waardoor $ca > 1$, zal de belastingquote een rol gaan spelen. De belastingquote (b) is van invloed op de helling van (2.5) in het snijpunt met de 45-graden-lijn, k^* .

Als $k > k^*$, dan zal de kapitaalgoederenvoorraad dalen. Als $k < k^*$, zal de kapitaalgoederenvoorraad stijgen. Hierdoor beweegt de kapitaalgoederenvoorraad (indien $ca > 1$) naar het evenwichtsniveau. De hoogte van de belastingquote bepaalt mede het evenwichtsniveau van de kapitaalgoederenvoorraad.

Of en hoe de kapitaalgoederenvoorraad het evenwichtsniveau bereikt is afhankelijk van de produktiviteit en de spaarquote. De dynamiek van het aanpassingsproces wordt bepaald door de helling van de curve (2.5) in het evenwichtspunt, k^* .

Deze helling is als volgt te bepalen:

$$dk_{t+1}/dk_t k^* = ca - 2cba^2 k^* = 2 - ca \quad (2.8)$$

De kapitaalgoederenvoorraad zal naar het evenwichtspunt tenderen als de absolute waarde van de afgeleide (2.8) kleiner is aan 1. Dat wil zeggen dat het verschil tussen k^* en k_{t+1} na elke periode kleiner wordt: de af- en toename van de belastingen bepaalt mede of de kapitaalvoorraad daalt of stijgt. De produktiviteit en de spaarquote bepalen of de groei van de kapitaalgoederenvoorraad toe- of afneemt. Als we uitgaan van een $k < k^*$ ($k > k^*$) zal de stijging (daling) in de productie in elke periode groter zijn dan de stijging (daling) in de belastingen. De mate van stijging (daling) neemt af in de nabijheid van k^* , totdat geldt $k=k^*$.

Als $1 < ca < 3$, zal de kapitaalgoederenvoorraad naar het evenwicht tenderen. Hoe dit aanpassingsproces plaatsvindt is afhankelijk van de waarde van ca . Als $1 < ca < 2$ zal deze aanpassing monotoon verlopen. Uitgaande van een niveau van de kapitaalgoederenvoorraad kleiner dan k^* zal k elke periode stijgen, totdat de evenwichtswaarde k^* bereikt is. Als $2 < ca < 3$, dan zal de aanpassing cyclisch verlopen. Door de gezamenlijke reactie van de produktiviteit en de spaarquote zal de stijging van de netto kapitaalgoederenvoorraad (cO) in de omgeving van k^* leiden tot een kapitaalvoorraad die groter is dan k^* . In de volgende periode daalt de productie en de kapitaalvoorraad dusdanig dat de kapitaalvoorraad kleiner is dan k^* . Echter, omdat dk_{t+1}/dk_t (absoluut) klei-

ner is dan 1 zal het verschil $k_{t+1} - k_t$ steeds kleiner worden. Uiteindelijk zal k het evenwichtspunt bereiken, waarna de fluctuaties stoppen.

Als $3 < ca < 4$, zal de kapitaalgoederenvoorraad ook fluctueren rond k^* , maar deze fluctuaties zullen niet verdwijnen. Net als in het voorafgaande geval zal, als we uitgaan van $k < k^*$, een tendens bestaan naar het evenwichtspunt, maar in de nabijheid van het evenwichtspunt zal k "doorschieten" naar een kapitaalgoederenvoorraad groter dan k^* . Opnieuw bestaat een tendens naar k^* , maar dit punt wordt nooit bereikt, k fluctueert rond k^* . In het gebied tussen 3 en (ongeveer) 3,6 zullen de fluctuaties nog regelmatig zijn, waarin cycli met 2, 4 of meer perioden herkenbaar zijn. Echter als ca groter is dan 3,6 behoren ook andere patronen tot de mogelijkheden. Deze fluctuaties zijn schijnbaar niet onderhevig aan enige regelmaat, maar blijven te berekenen aan de hand van vergelijking (2.5). Als $ca > 4$, dan zal k blijven stijgen, ook als $k > k^*$. De productie neemt explosief toe, waardoor het model instabiel wordt.

Terugkerend naar de ondernemer/arbeider in ons voorbeeld zal bij een spaarquote rond de 50% en een kapitaalproductiviteit rond de 7,5 de productie tot stand komt alsof de ondernemer volkomen willekeurig per periode haar productie bepaalt (bijvoorbeeld met behulp van een dobbelsteen). Het deterministische proces dat ten grondslag ligt aan haar gedrag is aan de hand van de uitkomsten niet of nauwelijks te achterhalen, zeker niet als de metingen van de productie ook nog aan fouten onderhevig is, of als de productie alleen als macro-aggregaat te meten is. We zullen hierop later nog terugkomen.

Het bovenstaande productie-belastingen-model is een simpel model, met veel onrealistische ad hoc veronderstellingen. Met name de kwadratische belastingfunctie is niet realistisch. Toch geeft dit voorbeeld goed weer hoe op een eenvoudige manier gecompliceerd gedrag kan ontstaan in een simpel dynamisch model.

De kwadratische belastingfunctie (2.2) is opgenomen omdat hierdoor een niet-lineariteit in het model wordt geïntroduceerd, die verantwoordelijk is voor het ontstaan van chaos. De resulterende kapitaalaccumulatiefunctie (2.5) is een van de eenvoudigste en (misschien daarom) meest gebruikte niet-lineaire functies in de chaos-theorie: de logistische functie.

Om (2.5) tot de "normale" logistische functie te herschrijven moet ba in (2.5) vervangen worden door k , terwijl we ca vervangen door u :

$$k_{t+1} = u \cdot k_t \cdot (1 - k_t) \tag{2.9}$$

Met $0 < u$; $0 < k < 1$.

We hebben in het voorafgaande al gezien dat als:

- $0 < u \leq 1$: k monotoon naar 0 gaat;
- $1 < u \leq 2$: k gaat monotoon naar de evenwichtswaarde $k^* = 1 - 1/u$;
- $2 < u \leq 3$: k gaat cyclisch naar de evenwichtswaarde k^* ;
- $3 < u \leq 4$: k gedraagt zich stabiel cyclisch, dan wel chaotisch;
- $4 < u$: k wordt explosief en instabiel.

Een alternatieve manier om het bestaan van cycli aan te tonen is het gebruik van de tweede iteratie van de logistische functie:

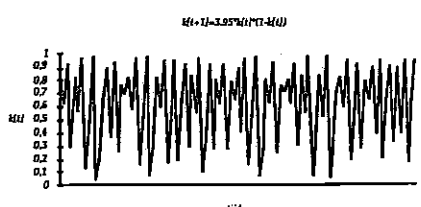
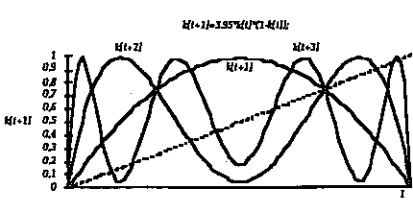
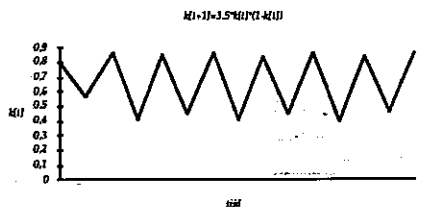
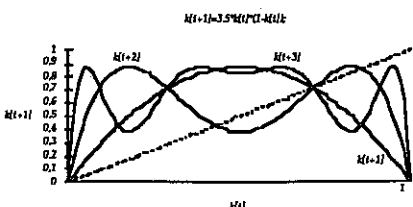
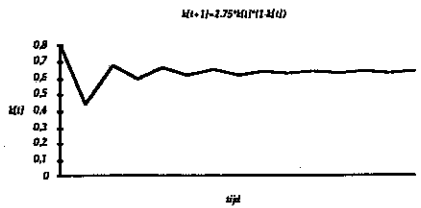
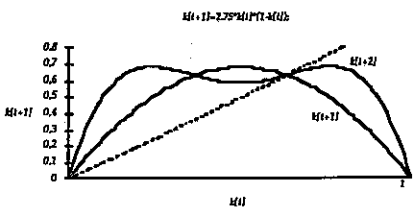
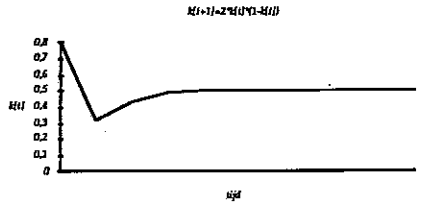
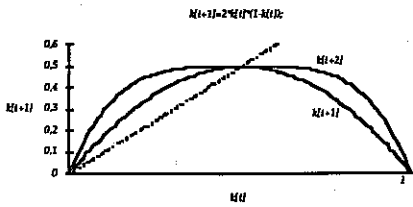
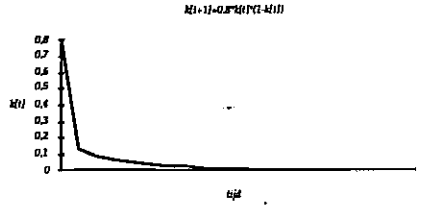
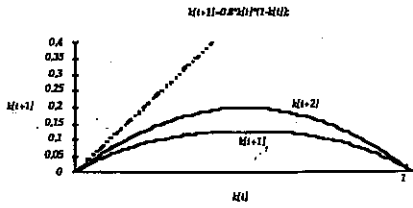
$$k_{t+2} = u^2 k_t (1 - (1+u)k_t + 2uk_t - uk_t^3) \quad (2.10)$$

In figuur 2 is k weergegeven, als functie van zichzelf en de ontwikkeling in de tijd. Het blijkt uit deze figuur dat i. de monotone beweging en de fluctuaties naar het evenwichtspunt afhangen van het snijpunt tussen de k -curve en de 45-gradenlijn, ii. het optreden van cyclische fluctuaties samengaat met snijpunten met de twee-toppige tweede iteratie van de logistische functie (2.10). Eveneens is in deze figuur te zien dat chaos optreedt als de vier-toppige derde iteratie van de logistische functie snijpunten heeft met de 45-gradenlijn. In beide gevallen wordt het oorspronkelijke evenwicht ($k_t = k_{t+1}$) instabiel en zal k fluctueren tussen de snijpunten met curves van de tweede en derde iteratie. We zullen hier niet op ingaan. Aan welke condities moet worden voldaan wordt onder andere behandeld in Gabisch en Lorenz (1989) en Baumol en Benhabib (1989).

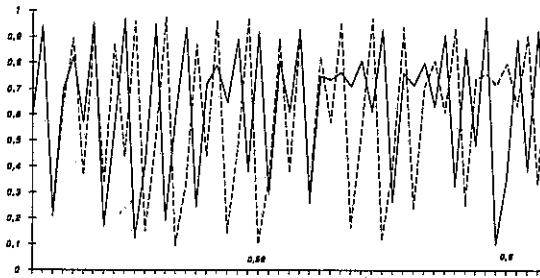
In de volgende paragrafen zullen de verschillende modellen worden teruggebracht tot de logistische functie, om aan te tonen dat chaos tot de mogelijkheden behoort en duidelijk te maken welke veronderstellingen hieraan ten grondslag liggen.

Voordat we verder gaan met de bespreking van de uitgebreidere modellen willen we eerst nog twee, nogal onplezierige, eigenschappen van deze chaotische vergelijkingen noemen. In de eerste plaats zijn chaotische vergelijkingen erg gevoelig voor de gekozen startwaarde. Een klein verschil in de startwaarde kan leiden tot totaal andere fluctuaties. Een voorbeeld is opgenomen in figuur 3.

Figuur 2: de logistische vergelijking bij verschillende waarden van u



Figuur 3: verschillende startwaarden.



In dit figuur is het resultaat weergegeven van twee simulaties van de logistische functie met $\mu=3,75$. In het eerste geval is uitgegaan van $k_0=0,6$; in het tweede $k_0=0,59$.

Na tien iteraties voorspelt de eerste simulatie een top, terwijl de tweede aangeeft dat er sprake is van het onderste omslagpunt van de cyclus.

Dit heeft belangrijke implicaties. Als verondersteld wordt dat de juiste structuur van de economie bekend is, zijn economische voorspellingen met behulp van chaotische vergelijkingen sterk afhankelijk van de mate van exactheid van de economische data.

Een ander probleem is van econometrische aard. De econometrische problemen en een overzicht van verschillende onderzoeken worden besproken in Scheinkman (1990). Hier willen we slechts aantekenen dat de uitkomsten van een chaotische vergelijking niet te onderscheiden zijn van die van een lineaire vergelijking met witte ruis. Hierdoor is het niet mogelijk de standaard econometrische technieken te gebruiken om chaotische processen te onderscheiden van fluctuaties veroorzaakt door exogene toevallige schokken. Hiervoor moeten andere technieken ontwikkeld worden.

Echter, het probleem van de gevoeligheid van de startwaarde blijft dan nog bestaan. Als we veronderstellen dat een onderzoeker de juiste vergelijking uit figuur 3 kent, maar niet de exacte startwaarde 0,6. In plaats daarvan neemt hij of zij een startwaarde van 0,59. Zoals blijkt uit figuur 3 is de kans dat de juiste vergelijking verworpen wordt niet denkbeeldig.

Een hiervan afgeleid probleem is de beschikbaarheid van voldoende data. Scheinkman laat zien dat de aanwezige tijdreeksen in het algemeen te kort zijn om met de bestaande technieken een duidelijk onderscheid te maken tussen chaos en randomverschijnselen. Echter, de aanwezigheid van chaos wordt in het verrichte onderzoek ook niet eenduidig verworpen (zie Scheinkman, 1990).

Anderzijds doet Kelsey (1988) verslag van een aantal onderzoeken die ingaan op de invloed van onverwachte verstoringen op de logistische vergelijking. Hij komt tot de conclusie dat door het toevoegen van een exogene storingsterm "(...) an infinite number of orbits are lost. In contrast chaotic behavior if anything becomes more common as the noise level is raised. Because of this relative sensitivity of cycles to random errors, a case can be made for paying more attention to chaotic solutions than to cyclic solutions" (Kelsey, 1988, 14).

Na deze korte inleiding in de werking van chaos en de daarbij voorkomende empirische problemen zal in de volgende paragrafen ingegaan worden op een aantal theoretische modellen, die chaotische fluctaties genereren onder verschillende veronderstellingen. Hoe en waarom deze chaotische dynamiek optreed zal worden geanalyseerd met behulp van de hier geïntroduceerde logistische vergelijking.

3 Chaotische dynamiek in de economie

Chaos bij volledige mededinging en perfecte informatie.

Het model dat in deze paragraaf wordt beschreven is gebaseerd op artikelen van Weddephol (1990) en Grandmont (1985). Hun modellen zijn uitgebreider, maar het mechanisme verantwoordelijk voor het ontstaan van chaos is in essentie het zelfde.

We gaan uit van een overlappende generaties-model, met slechts één goed. De individuen leven twee perioden. In de eerste periode ontvangen alle individuen een gegeven reëel inkomen. Dit inkomen wordt verdeeld over de eerste periode consumptie en de besparingen. Het geproduceerde goed is niet te bewaren, zodat de besparingen in geld moeten worden aangehouden. De aanwezige geldvoorraad wordt constant verondersteld. In de tweede periode worden de besparingen geconsumeerd. Verder wordt geabstraheerd van groei. Deze veronderstellingen worden alleen gemaakt om de analyse niet te complex te maken. Zij kunnen worden versoepeld zonder de conclusies te beïnvloeden.

De budgetbeperkingen van het individu, geboren in periode i zijn:

In de eerste periode:

$$p_i c y_i + m = p_i w \quad (3.1.1)$$

In de tweede periode:

$$p_{i+1} c^o_{i+1} = m \quad (3.1.2)$$

Waarin:

- y = jong
- o = oud
- p = prijs
- c = consumptie
- m = geldvoorraad
- w = inkomen
- i = tijd ($i=1,2,\dots$)

De vergelijkingen (3.1.1) en (3.1.2) zijn samen te voegen tot de intertemporele budgetbeperking:

$$cY_i + (1/r_i)c^0_{i+1} = w \quad (3.1.3)$$

Waarin:

$$r_i = P_i / P_{i+1}$$

De intertemporele budgetbeperking geeft aan hoe het inkomen over beide perioden verdeeld wordt, waarbij r_i de intertemporele prijsverhouding (de rentevoet) weergeeft.

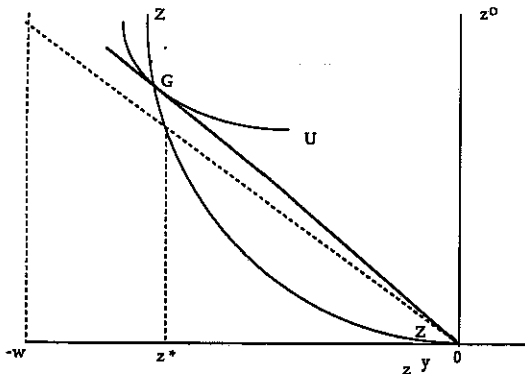
Vergelijking (3.1.3) kan worden herschreven in termen van vraagoverschotten (z) als we gebruik maken van de volgende definitie $z = c - w$:

$$zY_i + (1/r_i)z^0_{i+1} = 0 \quad (3.1.4)$$

De besparingen (ontsparringen) in de eerste periode zijn even groot als de verdisconteerde waarde van de ontsparingen (besparingen) in de tweede periode van het leven van de individu. In het bovenstaande simpele model zijn ontsparingen in de eerste levensfase cq. besparingen in de tweede levensfase niet mogelijk vanwege veronderstelling dat het individu slechts in de eerste periode een inkomen ontvangt.

Tot slot veronderstellen we dat de individuen een continue, monotone, strikt quasi concave nutsfunctie, U , hebben, zodat het raakpunt met de intertemporele budgetrestrictie (gegeven w en r_i) een nutsmaximum is (Weddepohl (1990)). Het is mogelijk een combinatie van zY en z^0 te vinden die het individueel nut maximaliseert. Voor een gegeven w en r_i is dit punt G in figuur 4. Bij verschillende waarden van r_i zal het individu een andere combinatie (zY , z^0) kiezen. Dat wil zeggen dat het individu consumptie in de ene periode opoffert in ruil voor een hoger consumptieniveau in de andere periode. De curve die de optimale combinaties bij verschillende waarden van r_i verbindt wordt de offercurve genoemd (ZZ in figuur 4). De offercurve ligt in het noord-west kwadrant omdat we verondersteld hebben dat het individu geen tweede periode inkomen heeft en dus noodgedwongen moet sparen voor de tweede periode consumptie.

Figuur 4: de offercurve



Als afgezien wordt van aggregatieproblemen, zoals heterogene consumenten, kan uit dit intertemporele individuele optimum het goederenmarktevenwicht bepaald worden. Als de consumptie van de oude generatie en het prijspeil in periode 1 als gegeven wordt verondersteld zal de economie in evenwicht zijn als geldt:

$$p_1 c^y_1 + p_1 c^o_1 = p_1 w \quad (3.1.5)$$

Uit vergelijking (3.1.5) volgt:

$$z^y_1 = -z^o_1 \quad (3.1.6)$$

Vergelijking (3.1.6) geeft aan dat wil sprake zijn van een goederenmarktevenwicht de gewenste besparingen van de jonge generatie (de vraag naar geld) even groot moet zijn als de gewenste vraag naar goederen (ontsparingen: aanbod van geld) van de oude generatie. Verondersteld wordt dat het prijsmechanisme zorgt voor de afstemming tussen de vraag naar en het aanbod van geld. Het goederenmarktevenwicht is in figuur 4 weergegeven door middel van de stippellijn (de 45-graden-lijn). Het is nu mogelijk om het dynamische aanpassingspad van z te traceren: gegeven de waarde van z^o_1 kunnen via de 45-graden lijn de besparingen van de jonge generatie bepaald worden (z^y_1). Via de offercurve worden de volgende periode besparingen (z^o_2) bepaald en zo voort.

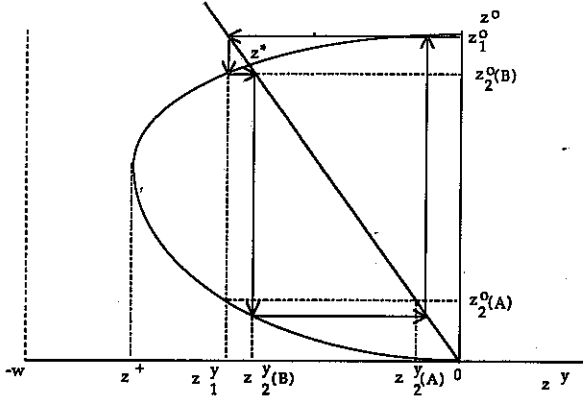
Als $z^o_1 = z^*$ in figuur 4, dan is sprake van een monetair evenwicht en geld heeft een opbrengst groter dan nul. Elke generatie spaart een bedrag gelijk aan z^* . Als $z^o_1 < z^*$, dan zullen de volgende periode besparingen kleiner zijn. De besparingen gaan naar nul, het autarkisch evenwicht, en geld heeft geen waarde. Elke generatie consumeert in de eerste levensfase haar gehele inkomen. Aan de andere zijde van z^* ($z^o_1 > z^*$), zal elke generatie meer sparen dan de vorige generatie. Dit zal leiden tot gewenste besparingen die groter zijn dan het inkomen, wat niet mogelijk is.

Bij het tekenen van de offercurve in figuur 4 is verondersteld dat de besparingen stijgen als gevolg van een stijging van r_1 . Dit is een normale veronderstelling in de economische theorievorming. Het is echter ook mogelijk dat de besparingen als gevolg van een rentestijging dalen. Een stijging van r_1 heeft twee effecten. In de eerste plaats een substitutie-effect. De kosten van de eerste-periode-consumptie, in termen van de tweede-periode-consumptie zullen stijgen. Hierdoor zal substitutie optreden: het individu spaart meer.

Daarnaast neemt echter het tweede-periode-inkomen uit de besparingen toe. Het individu kan deze toename van het inkomen over de twee perioden verdelen, door minder te sparen. Het totale effect van een stijging van r_1 is afhankelijk van de relatieve sterkte van het inkomens- en substitutie-effect.

Grandmont (1985) ontwikkelde een model waarin, na een zeker niveau van r_1 , het inkomenseffect het substitutie-effect gaat overheersen. Een stijging in r_1 resulteert dan in een daling van de besparingen. Dit heeft tot gevolg dat de offercurve terugbuigt naar de y -as. Dit is in figuur 5 weergegeven. Als r_1 stijgt boven r_1^+ , de prijsverhouding die hoort bij z^+ , zullen de besparingen dalen.

Figuur 5: de terugbuigende offercurve



Grandmont en Weddepohl veronderstellen niet dat de besparingen terugbuigen tot de z^0 -as. In figuur 6 is voor de eenvoud verondersteld dat een prijsverhouding bestaat waarbij de besparingen nul zijn. Dit is gedaan om de analogie met de logistische curve uit figuur 1 te benadrukken. Het zal dan ook geen verassing zijn dat chaotische dynamiek tot de mogelijkheden behoort.

Er is als voorbeeld een periode 3-cyclus in figuur 5 getekend. Om stabiele cycli te genereren is het nodig dat de offercurve en de 45-graden-lijn elkaar snijden in een punt waar de absolute waarde van de helling van de offercurve kleiner is dan 1. Gegeven de besparingen in periode 1 (z^0_1) zal de volgende generatie haar besparingen kiezen (z^y_1). In periode 2 zal dit leiden tot een prijsniveau consistent met het goederenmarkt-evenwicht en de besparingen in de volgende periode.

Figuur 5 laat tevens zien hoe de cyclus gereconstrueerd kan worden. Als we starten bij een beginpunt z^0_1 in figuur 5 kunnen via het markt-evenwicht de besparingen van de jonge generatie bepaald worden: z^y_1 . Dit is, gegeven de offercurve, consistent met twee prijsverhoudingen en twee verschillende reële waarden van de besparingen: $z^0_2(A)$ en $z^0_2(B)$. De oude generatie is indifferent tussen situatie A en B. Beide liggen op de offercurve. Als situatie A resulteert (een hogere prijs dan in de eerste periode), zal de volgende generatie opnieuw voor een onbepaalde keus staan. Blijft de prijs stijgen, dan zal een tendens bestaan naar het autarkisch evenwicht (de oorsprong), waarin geld haar waarde heeft verloren en de besparingen nihil zijn. Daalt de prijs voldoende dan zullen de besparingen tenderen naar het monetaire evenwicht, waar de besparingen van alle generaties aan elkaar gelijk zijn, zodat ook de intertemporele prijsverhouding constant is. Een tussenoplossing is dat de prijsverhoudingen wisselend stijgen en dalen, zodat een cyclus ontstaat: de vraag naar en het aanbod van geld resulteren in een prijsverhouding die consistent is met het ontstaan van de cyclus.

Terug redenerend is het wel mogelijk de cyclus te reconstrueren. Gegeven $z^y_2(B)$ volgt uit het goederenmarkt-evenwicht $z^0_2(B)$. Hieruit is z^y_1 te vinden, wat via de 45-graden lijn leidt tot z^0_1 . Via het snijpunt met de offercurve en het daarbij behorende goederenmarkt-evenwicht komen we terug bij $z^y_2(B)$, zodat de cyclus rond is. Grandmont en

Weddepohl noemen dit een oplossing met "backward perfect foresight". Het probleem is nu te verklaren hoe een stabiele cyclus tot stand komt met "forward perfect foresight". Grandmont lost dit probleem als volgt op. Hij toont aan dat een cyclus zal ontstaan als de economie in het verleden al cyclisch gedrag vertoond heeft en het individu een "geheugen" heeft dat lang genoeg is om de periode van de cyclus te herkennen. Dat wil zeggen dat de oude consumenten in periode 2 opteren voor $z^0_2(B)$, terwijl de jonge consumenten tegen het bijbehorende prijspeil het geldaanbod zullen absorberen. De keuze van de consument is dan consistent met het ontstaan van de cyclus. In onze visie is deze oplossing een ad hoc oplossing, bijna een tautologie: als de individuen een cyclus verwachten, omdat in het verleden altijd sprake is geweest van een cyclus, zullen zij zich gedragen alsof sprake is van een cyclus, dus bestaat de cyclus.

In het Grandmont-model is geen sprake van productie. Het inkomen wordt verworven in ruil voor arbeid, zonder dat de productie(techniek) expliciet besproken wordt. Benhabib en Laroque (1988) hebben een model ontwikkeld waarin de productiefunctie expliciet een rol speelt. Behalve in Benhabib en Laroque (1988) speelt de productiefunctie ook een rol in de modellen van Reichlin (1986) en Julien (1988). Voor meer voorbeelden zie Benhabib en Laroque (1988) en Baumol en Benhabib (1989). De conclusies van Benhabib en Laroque (1988) zijn dat cycli (en chaos) in twee gevallen kunnen voorkomen. Het eerste geval is als de besparingen een dalende functie zijn van de rentevoet (mits de factorsubstitutie in de productiefunctie niet te groot is). Dit is conform de bevindingen van Grandmont. Daarnaast zijn cyclische fluctuaties ook mogelijk, bij een positieve spaar/rente-relatie, als sprake is van complementariteit van de productiefunctie. De cyclus, zoals die door hen beschreven is, loopt als volgt. Als de kapitaalaccumulatie groter is dan de golden rule accumulatie (het stabiel evenwicht, Benhabib en Laroque (1988), 149) zal de reële opbrengstvoet van kapitaal dalen. De waarde van geld in termen van het geproduceerde goed daalt, zodat de prijs van de productie stijgt. Deze inflatie doet de winstgevendheid van de productie stijgen. Dit stimuleert de overaccumulatie van kapitaal. De vraag naar arbeid is groter dan het (gegeven veronderstelde) aanbod van arbeid, waardoor de lonen hoger zijn dan de golden rule lonen. Deze hoge loonvoet vergroot de overaccumulatie via de hogere vraag. De inflatie verkleint de reële kasvoorraden, wat een negatief effect op de vraag heeft. Als de reële kasvoorraden kleiner zijn dan hun golden rule niveau zullen de besparingen de vorm van geld aannemen, niet langer die van reël kapitaal. De waardestijging van geld doet de winstgevendheid van kapitaal dalen, waardoor de productie zal dalen. De oorzaken van de cyclus liggen in de interactie tussen de inkomensverdeling en het reële kasvoorradeneffect (real balance effect). De strijd om de inkomensverdeling (de klasstrijd) als motor van de kapitalistische dynamiek is ook beschreven in de "predator-prey"-modellen, waarvan wij een voorbeeld zullen zien in paragraaf 4.

De conclusie van Benhabib en Laroque sluit dan ook aan bij de conclusies van Van der Ploeg (1985), die de mogelijkheden voor het ontstaan van conjunctuurykli onderzoekt in groeimodellen van neo-klassieke (Solow) en neo-keynesiaanse (Goodwin) origine. Hij concludeert dat cycli alleen kunnen optreden als sprake is van complementariteit, dat wil zeggen dat de productie alleen uitgebreid kan worden door het inschakelen van meer van alle produktiemiddelen. De verdeling van de extra productie kan leiden tot in-

komensverhoudingen die de oorzaak zijn van afwijkingen van de lange termijn evenwichtsgroei. Het door Benhabib en Laroque beschreven mechanisme waarin de rente niet alleen de vraag naar geld beïnvloed, maar ook het aanbod van kapitaal is ook beschreven in Brunner en Meltzer (1976). De beschreven conjunctuurcyclus vertoont overeenkomsten met de conjunctuurcyclustheorie van Hayek (Haberler, 1939), hoewel de laatste dieper ingaat op de gevolgen van de (diepte-) investeringen op de kapitaalintensiteit van het productieproces.

Beide besproken modellen zijn "neo-klassiek" te noemen, in de zin dat beide uitgaan van prijsflexibiliteit en volledige concurrentie. Hoewel deze veronderstellingen de modellen vergelijkbaar maakt met de nieuw-klassieke modellen, verhogen ze het abstractieniveau. In de volgende twee paragrafen worden modellen behandeld die marktimperfecties introduceren, als gevolg waarvan cyclische fluctuaties resulteren.

Chaos bij onvolledige mededinging.

Van Witteloostuijn en van Lier[1990] gaan uit van een model met Cournot competitie, gebaseerd op een model van Rand (Van Witteloostuijn en van Lier[1990], 3). In het Cournot model van een duopolie kiest een onderneming een produktieniveau, waarbij de winst maximaal is, gegeven de reactie van de concurrent. Rand veronderstelde dat de reactiecurve een nietlineaire "hill shaped" functie is (zoals de logistische vergelijking) en toont aan dat chaotische dynamiek tot de mogelijkheden behoort.

Van Witteloostuijn en van Lier breiden het model op twee manieren uit. In de eerste plaats geven zij een verklaring waarom de reactiecurve een logistische functie is. Ten tweede veronderstellen zij een monopolistische productie groter dan nul. Dit heeft geen invloed op dynamiek, zodat wij niet op deze aanvulling van het oorspronkelijke Rand-model ingaan. Van Witteloostuijn en van Lier geven in hun paper de formele bewijzen van de hiervolgende verbale uiteenzetting. Omdat wij in paragraaf 2 al zijn ingegaan op de verschillende condities waaraan moet worden voldaan voor het opreden van chaos gaan we hier niet in op de mathematische uitwerking.

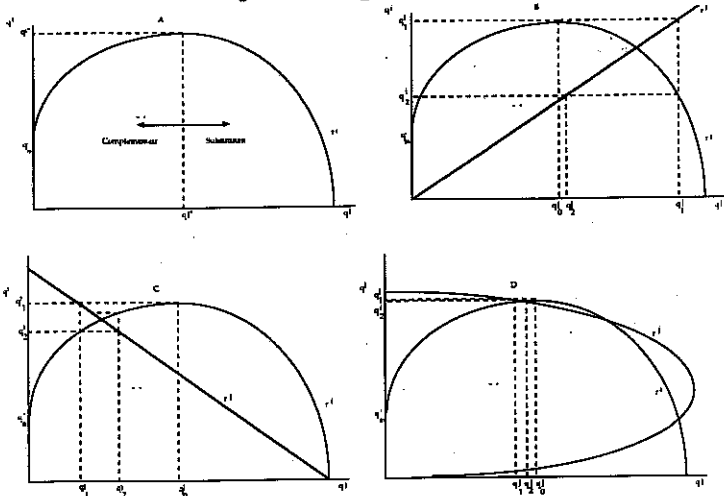
Veronderstel dat een nieuwe onderneming toetreedt tot een van oorsprong monopolistische markt. De monopolistische onderneming heeft twee alternatieve reactiemogelijkheden. De monopolistische onderneming kan haar productie uitbreiden boven het oorspronkelijk winstmaximaliserende niveau. Dit kan op twee gronden. De oorspronkelijke productie kan lager zijn geweest dan het volledige bezettingniveau, omdat de onderneming de onbenutte produktiecapaciteit als een toetredingsbarrière gebruikte. Ook kan de monopolistische onderneming tijdelijk een verlies accepteren, om op lange termijn haar marktaandeel terug te winnen. Van Witteloostuijn en van Lier spreken in dit geval van strategische complementen.

Anderzijds kan de monopolistische onderneming een minder aggresieve strategie volgen. Zij kan haar productie verminderen en vrijwillig de markt delen met de concurrent. In dit geval wordt gesproken van strategische substituten.

Van Witteloostuijn en van Lier veronderstellen dat de onderneming zich als volgt zal gedragen (zie figuur 6a). Bij een toetredingshoeveelheid lager dan qj^* bestaat voor de onderneming de mogelijkheid om haar productie te vergroten boven de monopolistische

productie q^i_m . Naarmate de productie dichter in de buurt van q^{i*} komt te liggen neemt de onbenutte productiecapaciteit af en/of zal het verlies toenemen. Als onderneming j meer aanbiedt dan q^{i*} , verhinderen de productiecapaciteit en het verliesniveau onderneming i verder uit te breiden. Zij zal haar productie inkrimpen (ten opzichte van q^{i*}). De reactiefunctie r_i is in figuur 6a weergegeven door een logistische curve. De parameter in de logistische vergelijking geeft de mate van gevoeligheid van de productie van onderneming i voor de concurrerende productie van onderneming j weer.

Figuur 6: actie en reactie bij onvolledige concurrentie.



Om het aanpassingspad te bepalen moet nu een reactiefunctie van de toetredende onderneming worden gedefinieerd. Van Witteloostuijn en van Lier veronderstellen drie verschillende gedragsvergelijkingen.

Eerst beschrijven zij het geval van een toetredende navolger. De reactiefunctie van de toetredende onderneming j wordt voorgesteld door:

$$r^j(q^i) = q^i \tag{3.2.1}$$

De reactiefunctie van j (r^j) kan afgezet worden in dezelfde q^j - q^i ruimte als de reactiefunctie van i. Dit is de 45-graden lijn in figuur 6b. Stel dat onderneming j toetreedt op de markt met hoeveelheid q^j_0 . Onderneming i zal reageren met een uitbreiding van de productie tot q^i_1 . Deze hoeveelheid zal geïmiteerd worden door onderneming j: via de 45-graden lijn kan q^j_1 worden bepaald. Hierop produceert onderneming i q^i_2 enzovoorts. Het zal duidelijk zijn (zie paragraaf 2) dat voor zekere waarden van de aanpassingsparameter in de logistische vergelijking chaotisch gedrag mogelijk is.

Een ander geval dat door van Witteloostuijn en van Lier wordt besproken is het klassieke geval van de aanpasser. De toetredende onderneming past haar gedrag aan aan dat van de monopolist. De reactiecurve zal dan dalen (zie figuur 6c):

$$r^i(q^i) = 1 - q^i = q^j \quad (3.2.2)$$

Veronderstel dat de toetredende onderneming de markt betreedt met een produktie groter dan de hoeveelheid waarvoor geldt: $q^j = q^i$ (bijvoorbeeld met q^j_0 ; zie figuur 6c). Onderneming i reageert met een stijging van de produktie tot q^i_1 . Dit aggresieve gedrag noopt de aanpasser j diens produktie te reduceren tot q^j_1 , enzovoorts. Of de produktie op lange termijn naar het snijpunt van de twee curven zal tenderen, danwel dat (in)stabele cycli tot standkomen is afhankelijk van de helling van de reactiecurve r^i in het snijpunt met r^j .

Het derde geval dat door Van Witteloostuijn en van Lier wordt behandeld is het geval van gelijksoortige reactiecurven (figuur 6d). Zij bewijzen dat chaotisch gedrag tot de mogelijkheden behoort. Of de intrede leidt tot (in)stabele cycli, of een evenwicht (op een van de drie snijpunten) is afhankelijk van de reactieparameters van de reactievergelijkingen en de startwaarde.

Een interessant verschijnsel doet zich voor in deze modellen. Een verschil treedt op tussen het micro-economisch chaotisch gedrag en de macro-economische data. In de eerste variant zal het gedrag van de navolger het chaotische gedrag van de monopolist versterken. De macro-economische produktie zal zich chaotisch gedragen. In het geval van het accomoderende gedrag zal de macro-economische produktie niet veranderen, ook als het gedrag van de monopolist chaotisch is. Een toename(afname) in de produktie van de monopolist zal gecompenseerd worden door een afname(toename) in de produktie van de aanpasser. Als beide ondernemingen zich chaotisch gedragen zal een toename van de produktie van de ene versterkt worden, soms gecompenseerd worden door het gedrag van de andere onderneming. Hierdoor kan het voor lange perioden lijken of de produktie stabiel is, terwijl in andere perioden de produktie aan sterke fluctuaties onderhevig is. De afwezigheid van bewijzen voor chaotische fluctuaties in geaggregeerde macro-data is dus geen eenduidig bewijs van de afwezigheid van chaotisch gedrag op micro-economisch niveau.

Financiële chaos.

In deze paragraaf keren we terug naar de veronderstelling van volledige concurrentie. De bovenstaande modellen zoeken de bron van de fluctuaties in de reële sfeer. Een andere sector waar de chaostheorie is toegepast is de financiële sector. Met name de heftige fluctuaties van de aandelenkoersen zijn te verklaren met behulp van de deterministische chaos. Voorbeelden van dit onderzoek zijn te vinden in Day en Huang (1989) en Huang en Day (1989), die drie soorten investeerders onderscheiden. Elke groep wordt gekenmerkt door een andere houding ten opzichte van risico en prijsvorming. Dit verschil in gedrag veroorzaakt hevige (chaotische) fluctuaties in de aandelenkoersen. Een ander voorbeeld is Aiyagari (1988), die de aandelenprijzen verklaart uit een niet lineair model, waarin een verband bestaat tussen de aandelenprijzen en verwachtingen omtrent de toekomstige aandelenprijzen.

De twee modellen die in deze paragraaf centraal staan onderscheiden zich op twee manieren van de hiervoor genoemde modellen. Ook in deze onderzoeken wordt de oorzaak van de fluctuaties in de eerste plaats gezocht in de financiële sfeer. Zij veronderstellen echter dat deze financiële fluctuaties consequenties hebben voor de reële sfeer. Omgekeerd zullen de onevenwichtigheden in de reële sfeer gevolgen hebben voor de ontwikkelingen in de financiële sector.

Daarnaast is sprake van een ideologisch verschil. De interactie tussen de reële en de financiële sectoren komt in de hier behandelde onderzoeken voort uit de visie op het proces van kapitaalaccumulatie. Foley (1986) omschrijft de oorzaak van de cyclus als volgt:

"In the circuit of capital framework, (de kapitalistische crisis als historisch fenomeen) can be expressed as systematic changes in the underlying parameters of the accumulation process, the markup, capitalization rate, and time lags in production, realization, and finance. These changes in parameters must force the system off its path of steady state" (Foley, 1986, 48). Dit leidt hem tot de conclusie dat *"[I]n mathematical terms, this type of explanation of crisis involves studying the non-linear relations among the parameters of the circuit of capital and between those parameters and capital accumulation itself"* (Foley, 1986, 48).

Overigens maakt geen van beide onderzoeken gebruik van de logistische vergelijking, maar is de dynamiek van beide modellen met behulp daarvan weer te geven zonder de oorspronkelijke presentatie geweld aan te doen.

Foley (1987) gebruikt een model waarin de winstzoekende ondernemingen de economische beslissers zijn. Hij maakt geen onderscheid tussen de verschillende vormen van kapitaal die gebruikt worden in het productieproces. De totale som geld die geïnvesteerd is in het productieproces bestaat uit vaste kapitaalgoederen, het werkkapitaal (inclusief de lonen) en de voorraden grondstoffen, half produkten en gereedproduct. Hij noemt dit de capital outlays (productiekosten; zie Foley, 1986).

Als we uitgaan van een hoeveelheid geld als beginnende kasvoorraad moet het productieproces beginnen met het investeren in de productiekosten. Dit verlaagt de kasvoorraad en vergroot de voorraad productief kapitaal (inclusief de voorraden en de beschikbare arbeid). De verkopen van de geproduceerde goederen vergroten de kasvoorraad. Foley veronderstelt dat de ondernemingen de kasvoorraad aanhouden als banktegoeden. Naast de financiering uit eigen tegoeden hebben de ondernemingen de mogelijkheid geld te lenen bij de banken en andere ondernemingen.

Het arbeidsinkomen is constant en wordt geheel geconsumeerd. De geldvoorraad is exogeen en groeit met een constante groeivoet g . De mate waarin de ondernemingen investeren in de productiekosten is afhankelijk van hun winstvoet en de mate van liquiditeit van de onderneming. In een situatie van evenwichtige groei zullen de investeringen in de productiekosten groeien met een groeivoet gelijk aan de winstvoet. Alle inkomsten worden (als consumptie of investeringen) weer terug gebracht in het (gesloten) systeem.

Foley beschrijft de dynamiek van het model met behulp van drie vergelijkingen:

$$\dot{m} = (g-r)m \quad (3.3.1)$$

$$\dot{f} = b(p(m)) - gm - rf \quad (3.3.2)$$

$$\dot{r}/r = a(r, m+f) - r \quad (3.3.3)$$

Met:

m = verhouding geld-productie, een indicator voor de liquiditeit van de ondernemingen;

r = winstvoet van de ondernemingen;

b = schuld-productie ratio;

$p = r - i$ = verschil tussen de winstvoet en de bankrente;

f = ratio van schuldbewijzen van andere ondernemingen-productie;

$a = C/C =$ groeivoet van de capital outlays als gevolg van veranderingen in r en $m+f$;

\dot{y} = de afgeleide naar de tijd van y .

Vergelijking (3.3.1) geeft aan dat de liquiditeit van de ondernemingen groeit als de exogene groei van de geldvoorraad groter is dan de groei van de investeringen, de winstvoet. Een grotere liquiditeit zal, volgens (3.3.2) leiden tot een verlaging van de schuldpositie. Een stijging van de winstvoet zal enerzijds de schuldpositie doen dalen, anderzijds zal de vraag naar leningen stijgen als de stijging van de bankrente achterblijft bij de stijging van de winstvoet ($b' > 0$). De groei van de winstvoet is afhankelijk van de investeringsneiging en het niveau van de winstvoet, zoals weergegeven in (3.3.3). Stijgt de investeringsneiging (door een hogere winstvoet of een hogere solvabiliteit) boven de huidige winstvoet, dan zal de omzet stijgen waardoor de toekomstige winstvoet stijgt.

Voor een situatie van evenwichtige groei is uit vergelijking (3.3.1) tot (3.3.3) af te leiden:

$$g = a \quad (3.3.4a)$$

$$r = g \quad (3.3.4b)$$

$$m+f = b/g \quad (3.3.4c)$$

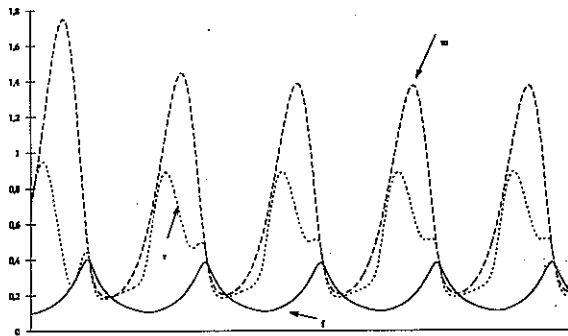
Foley toont aan dat de stabiliteit van het model afhankelijk is van:

- de elasticiteit van de vraag naar schulden met betrekking tot de geldgroei;
- de elasticiteit van de groei van de capital outlays met betrekking tot de winstvoet;
- de elasticiteit van de groei van de capital outlays met betrekking tot de liquiditeit van de onderneming.

De groei van de geldvoorraad moet gelijk zijn aan de groei van de investeringen in de produktiekosten volgens (3.3.4a), anders ontstaat een liquiditeitsstekort, wat de bankrente doet stijgen. Foley veronderstelt dat a afhankelijk is van r en $m+f$. Hij beschrijft de dynamiek van de onderneming als volgt: "Starting from a low profit rate, liquidity increases because the profit rate is below the growth rate of money. As a result of the increase in m , the interest rate falls further below the profit rate, and borrowing increases. Since borrowing creates financial assets for lending firms, f also increases in this phase. Firms are becoming more liquid. Eventually this liquidity leads them to expand their capital outlays at a rate higher than the profit rate. Since capital outlays are the source of aggregate demand, this leads to a rise in sales, an increase in the rate of turnover of productive capital, through the decline in inventories and increase in the rate of utilization of fixed capital, and hence a rise in the rate of profit. As the rate of profit rises, it exceeds the growth of money, and m starts to decline. In this phase of the cycle the interest rate rises more rapidly than the profit rate, so that the gap between them becomes narrower" (Foley, 1987, 372).

Het kleiner worden van het verschil tussen de rentevoet en de winstvoet verkleint de vraag naar schuldbewijzen, waardoor de totale vraag en de liquiditeit dalen. Als de liquiditeit gedaald is zal de expansie omslaan in een depressie. In de depressie daalt de winstvoet onder de geldgroeivoet en zal de liquiditeit opnieuw toenemen: de expansie neemt opnieuw een aanvang.

Figuur 7: Een voorbeeld van de dynamiek in Foley (1987)



In figuur 7 zijn de tijdspaden van r , m en f opgenomen, berekend volgens het model van Foley[1987]. Er zijn in dit model meer soorten van dynamiek mogelijk dan alleen de twee-perioden cyclus die Foley beschrijft. De dynamiek van het model van Foley is echter gecompliceerd, door het feit dat ook de parameters veranderen. Om het model te simplificeren herschrijven we vergelijking (3.3.3), met behulp van de definities

$$r = r_{t+1} - r_t \text{ en } r' = r/(1+a):$$

$$r'_{t+1} = [a(\cdot)+1]r'_t(1-r'_t) \tag{3.3.5}$$

Als we veronderstellen dat de verandering in investeringen in de kapitaalkosten (C) traag verloopt, dan kunnen we veronderstellen dat a constant is (het aanpassingsproces dat door Foley verondersteld wordt is een traag proces). Vergelijking (3.3.5) is dan gelijk aan de logistische vergelijking uit paragraaf 2, met a+1 gelijk aan u. Zoals al uiteengezet is in paragraaf 2 is chaos in dit model mogelijk.

Een ander onderzoek dat de primaire oorzaken van de conjunctuurcyclus in de financiële sfeer zoekt is het onderzoek van Franke en Semmler [1989]. De oorzaak van de cyclus is in hun model echter niet de objectieve mismatch tussen de interne winstvoet en de externe rentevoet, maar de subjectieve perceptie van de toekomst. Of, zoals zij Keynes citeren: *"on the confidence with which we make the forecast"*, maar *"there is no scientific base on which to form any capable probability whatsoever"* (Franke en Semmler, 1989, 3).

Evenwicht op de goederenmarkt wordt beschreven door een IS-functie. Het evenwicht op de geldmarkt door een LM-functie. Deze kunnen worden geschreven als:

$$IS = IS(l, p, r, i) \quad (3.3.6)$$

$$LM = LM(l, p, r, i) \quad (3.3.7)$$

Waarin:

- l = ratio van leningen van ondernemingen-nominale kapitaalgoederenvoorraad;
- p = de staat van vertrouwen;
- r = netto winstvoet;
- i = rentevoet op bankleningen en deposito's;

Op korte termijn wordt verondersteld dat de staat van vertrouwen (p) en de verhouding tussen leningen en de nominale kapitaalgoederenvoorraad (l) constant zijn. Evenwicht op de goederen- en geldmarkt (de IS- en LM-functies) ontstaan door de veranderingen in de winstvoet en de rentevoet als gevolg van vraag- en aanbodverschillen. Deze evenwichtssituaties zijn korte termijn evenwichten, omdat op lange termijn de staat van vertrouwen en de verhouding leningen-kapitaalgoederenvoorraad verandert, zolang zij afwijken van de lange termijn structurele waarden. De dynamiek van p en l wordt door Franke en Semmler beschreven als:

$$\dot{l} = a(l)h(p) - s(r) \quad (3.3.8)$$

$$\dot{p} = v(l, r-i, p) \quad (3.3.9)$$

Waarin:

- h(p) = investeringsfunctie
- s(r) = interne besparingen
- a(l) = het door leningen gefinancierde deel van de gewenste investeringen

Vergelijking (3.3.8) geeft de groeivoet van de leningen, als residu van dat deel van gewenste investeringen dat niet gefinancierd wordt door uitgifte van nieuwe aandelen, bestaande leningen en de eigen besparingen ($s(r)$). De gewenste investeringen zijn afhankelijk van de staat van vertrouwen. Franke en Semmler abstraheren van andere determinanten van de investeringen zoals de bezettingsgraad en de winsten "[F]or simplicity, and in order to fully concentrate on the role of expectations in a macrodynamical model" (Franke en Semmler, 1989, 4). Het vertrouwen varieert met de schulden-bezittingen van een onderneming (benadert door l), de mate van winstgevenheid ten opzichte de opbrengst op "risicooloze" beleggingen ($r-i$) en de staat van vertrouwen zelf.

Franke en Semmler veronderstellen dat v toeneemt als p stijgt. Als we starten in de optimistische expansiefase van de conjunctuurcyclus zal het optimisme zichzelf in stand houden en vermeederen. Dit stimuleert het gewenste niveau van de investeringen. In het begin zullen de hogere produktie en verkopen de liquiditeit van de ondernemingen doen toenemen (waardoor de schuld-aandelen ratio l daalt). Na verloop van tijd zal de liquiditeit echter dalen door de toegenomen investeringen. Dit zal de groeivoet van het optimisme ("the state of confidence") doen dalen, maar de staat van vertrouwen zelf zal nog niet verminderen.

Het hogere investeringsniveau zal ook de winstvoet en de rentevoet doen stijgen. Als de rentevoet sneller stijgt dan de winstvoet zal de groeivoet van p daardoor dalen. Uiteindelijk zal ook p dalen. Door de daling in de investeringen raakt de economie in een recessie. Door de lagere financieringsbehoefte van de gedaalde investeringen zal de schuld-aandelen ratio dalen, wat de kern van het herstel is.

"On the whole, however, the contracting forces, generated further away from the equilibrium, keep the fluctuations in a bounded interval whereas the repelling forces about the long run equilibrium keep the economy from converging toward its steady state values. Thus persistent cyclical behavior will result from this dynamics" (Franke en Semmler, 1989, 27).

Bij hun simulaties maken Franke en Semmler gebruik van een tweetoppige reactiefunctie om de dynamiek van de staat van vertrouwen te beschrijven. Het is ook mogelijk de staat van vertrouwen weer te geven door het gebruik van de logistische vergelijking. Essentieel is dat het vertrouwen stijgt als gevolg van het stijgende vertrouwen en daalt als het vertrouwen gedaald is. Boven een bepaald vertrouwensniveau, zal het vertrouwen afnemen, omdat ingezien wordt dat dit hoge vertrouwensniveau niet realistisch is. Instabiliteit van de verwachtingen omtrent de toekomstige situatie van de economie resulteren in instabiele fluctuaties rond het lange termijn evenwicht.

Tot nu toe heeft groei geen rol gespeeld. In de volgende paragraaf wordt een model beschreven, waarin de relatie tussen groei en lange termijnfluctuaties onderwerp van onderzoek is.

4 Chaotische groei

Een laatste toepassing van de logistische vergelijking waaraan hier aandacht wordt geschonken is het gebruik van de niet-lineaire chaotische vergelijking bij de analyse van economische groei. Goodwin (1988) stelt: *"When Schumpeter said that the cycle is simply the form growth takes, he implicitly destroyed a large part of the analytical structure of a whole era of economic theory. It means that the reduction of time series to trend, cycle and random shocks has to be rejected"* (Goodwin, 1988, 63).

Volgens Goodwin's interpretatie van Schumpeter is het niet mogelijk onderscheid te maken tussen een fundamentele groeivoet en periodieke fluctuaties rond deze fundamentele trend. Het zijn juist de korte termijn fluctuaties die de economie op een hoger groeiniveau brengen, terwijl de repercussies die deze hogere groei met zich meebrengen tot gevolg hebben dat de korte termijn fluctuaties optreden. In Goodwin (1988, 1990) wordt deze bewering geïllustreerd met behulp van een aantal simpele modellen.

Centraal in de door Goodwin beschreven modellen staat de S-vormige logistische vergelijking (Goodwin beschrijft alle variabelen in afwijking van hun oorspronkelijke evenwichtswaarden):

$$k_{t+1} = bk_t(1-k_t/c) \quad (3.4.1)$$

Deze variant van de logistieke vergelijking is gebaseerd op het idee van Schumpeter, dat een innovatie langzaam toegepast wordt. In (3.4.1) is c de evenwichtskapitaalgoederenvoorraad, na de innovatie. De innovatie zal tot gevolg hebben dat de kapitaalgoederenvoorraad langzaam stijgt boven haar oorspronkelijke evenwichtswaarde, totdat het verzadigingspunt ($k_t = k_{t+1} = c$) bereikt is. Hierna blijft de afwijking van de kapitaalgoederenvoorraad ten opzichte van haar "evenwichtswaarde" constant, met andere woorden het lange termijn niveau van de kapitaalvoorraad is gestegen.

Goodwin combineert dit Schumpeteriaanse concept met de Keynesiaanse visie dat de productie vraagbepaald is:

$$q_{t+1} = f(q_t) + a(k_{t+1} - k_t) \quad 3.4.2$$

Waarin:

$f(q_t)$ = een functie van de productie in de vorige periode(n)

a = parameter

k = kapitaalgoederenvoorraad

Een innovatie heeft twee tegengestelde effecten. In de eerste plaats stijgt de vraag, waardoor de productie stijgt. Dit zal via de gestegen vraag naar arbeid en de daarbij veronderstelde loonstijgingen een extra impuls geven aan de vraag. Anderzijds doet een toename van de kapitaalgoederenvoorraad (met name de toepassing van een nieuwe techniek) de productiviteit toenemen wat, gekoppeld aan de substitutie als gevolg van de loonstijgingen, de vraag naar arbeid doet afnemen, zodat de afzet daalt. Goodwin illustreert de verschillende effecten met behulp van twee modellen. Hij maakt verschillende veronderstellingen met betrekking tot de onderliggende economische structuur. In de eerste plaats maakt Goodwin gebruik van een simpele "multiplier-accelerator":

$$f(q_t) = dq_t + eq_{t-1} \quad (3.4.3)$$

Als (3.4.3) stabiel is, zal de innovatie tot gevolg hebben dat de produktie tijdelijk afwijkt van haar lange termijn evenwicht. Echter als de kapitaalgoederenvoorraad haar nieuwe evenwichtsniveau bereikt heeft zal de invloed van de gestegen vraag snel afnemen. De produktie keert op termijn terug naar haar evenwichtswaarde. Als de parameters in (3.4.3) een waarde hebben, waardoor verstoringen leiden tot fluctuaties, zal de innovatie leiden tot een cyclische "hump" in het tijdspad van (3.4.3). Door de invloed van de innovatie zullen de korte termijn fluctuaties bijna verdwijnen: *"The short cycle is completely distorted by the logistic: first it is shortened and made milder; then it is destroyed altogether, becoming a slower growth rate. Finally comes the great boom at the point of most rapid innovational investment. After that comes the reverse process but always somewhat different from before. (...) In principle each wave returns to its initial level and shape as the logistic approaches saturation level"* (Goodwin, 1990, 45). In het bovenstaande model is alleen rekening gehouden met de vraageffecten van de innovatie. De innovatie zal echter ook invloed hebben op de arbeidsproductiviteit. Om deze invloed te modelleren maakt Goodwin gebruik van het predator-prey-model. Gegeven de definitie van de produktie, $q = a_L * L$, en de definitie van de werkgelegenheid, $v = L/N$, is de volgende variant van (3.4.3) af te leiden:

$$f(q_t) = e(v, u, z, a_L) q_{t-1} \quad (3.4.4)$$

Waarin:

- v = werkgelegenheid ten opzichte van het constante arbeidsaanbod;
- u = aandeel van de lonen in de produktie;
- z = controlevariabele, die de druk van "volledige werkgelegenheid" op de werkgelegenheid reguleert;
- a_L = arbeidsproductiviteit: $a_L / a_L = mk/k$.

De werkgelegenheid (v, z) en het loonaandeel (u) zijn onderling afhankelijk. Een hoge loonquote vergroot de vraag, maar zal de werkgelegenheid verlagen. Vanwege de invloed van de controleparameter z zullen u en v zich bewegen in een gesloten band (de zogenoemde "Rössler Band", zie Goodwin[1990]): zij vertonen onregelmatige fluctuaties binnen zekere grenzen. Dit heeft tot gevolg dat de produktie eveneens onregelmatige fluctuaties vertoont. Hieraan toegevoegd wordt de stijging van de arbeidsproductiviteit als gevolg van de innovatie. In eerste instantie zal de produktie een stijgende tendens vertonen. Ook in dit model geldt dat na verloop van tijd de invloed van de innovatie wegebt, maar de overblijvende fluctuaties zijn groter dan die in de afwezigheid van de innovatie. Naarmate de simulatieperiode langer wordt zal de invloed van de innovatie kleiner worden, zodat de produktie (op zeer lange termijn) terugkeert naar de oorspronkelijke afwijkingen van de trend.

Goodwin (1988, 1990) toont aan dat onregelmatige fluctuaties mogelijk zijn in het predator-prey model, als verondersteld wordt dat de werkgelegenheid sneller verandert in de omgeving van volledige werkgelegenheid (als bovengrens) en een ondergrens.

Daarnaast toont hij aan dat onder verschillende veronderstellingen een innovatie leidt tot een (tijdelijk) hoger groeipad van de economie. Door de lange termijn golf wordt de intensiteit en de periodiciteit van de korte golf veranderd en soms te niet gedaan. Met andere woorden, de strijd rond de inkomensverdeling kan leiden tot onregelmatige heftige fluctuaties in de productie, maar deze fluctuaties zijn niet waarneembaar als door de toepassing van innovaties economische groei optreedt.

Een situatie die door Goodwin niet wordt besproken is het geval dat de logistische vergelijking zich chaotisch gedraagt. Hoewel het niet mogelijk was het Goodwin (1988, 1990)-model te reproduceren, met de door Goodwin gegeven parameters, zijn de relaties gesimuleerd met een model dat sterk op het Goodwin-model lijkt. Deze simulaties leiden tot de conclusie dat na een initiële stijging van de kapitaalgoederenvoorraad deze het verzadigingspunt niet zal bereiken, maar zal blijven fluctueren rond het nieuwe evenwichtsniveau. Tijdens de periode van kapitaalexpansie vertoont de productie dezelfde tijdelijke toename die ook door Goodwin is beschreven. Daarna zullen de fluctuaties in de kapitaalgoederenvoorraad de loon-werkgelegenheid fluctuaties in de productie gaan overheersen, zodat ook de productie zich chaotisch zal gedragen.

Het gebruik van een "hill-shaped" kapitaalaccumulatiefunctie is economisch als volgt te onderbouwen. Als voorbeeld kunnen we de kantoorautomatisering nemen. De introductie van computers ging gepaard met grote uitgaven. Slechts enkele ondernemingen waren bereid en in staat dergelijke investeringen te doen. Hierdoor stegen de investeringen boven hun lange termijn evenwichtswaarde. Naarmate de concurrentievoordelen groeiden en meer ondernemingen toe waren aan vervanging van hun systemen groeide de investeringen. Deze stijging van de investeringen neemt af naar mate meer ondernemingen geautomatiseerd waren. In plaats van de grote begininvesteringen worden dan slechts vervangingsinvesteringen gedaan. Deze zullen hoger liggen dan de vervangingsinvesteringen voor de innovatie, maar niet zo hoog als in de beginfase, wat de terugkeer naar het oorspronkelijke niveau verklaard.

De reden voor de fluctuaties kan liggen in het tegenstrijdige effect van hoge investeringen in de vorige periode. Deze zullen de uitbreidingsinvesteringen in latere perioden afremmen, maar de vervangingsinvesteringen doen toenemen. Het relatieve gewicht van wel/niet uitbreiden en vervangen zal het investeringsgedrag onvoorspelbaar doen lijken, met het bijbehorende onregelmatige verloop van de productie.

De bovenstaande interpretatie van het Goodwin (1988, 1990)-model heeft dezelfde tekortkoming als het oorspronkelijke model en de visie van Schumpeter: de innovaties veranderen het gedrag van de economie, maar het innovatieve proces zelf wordt niet verklaard in het model. Goodwin zegt hierover: "*A plausible analogy is offered by the so-called Roman fountain. Water flows into a basin: when the basin is filled to a certain point, a siphon is primed and it empties the basin at a greater rate than the inflow of water*" (Goodwin (1990), 42).

De groei van de productie wordt hier verklaard uit het optreden van een innovatie, maar dit zou vervangen kunnen worden door een andere exogene verandering die langzaam doorwerkt in de economie (bijvoorbeeld een olieprijsverlaging, die langzaam doorwerkt in de prijzen van de eindprodukten). Een tweede tekortkoming is het "wegebben" van het effect van de innovatie. Hoewel de kapitaalgoederenvoorraad en de arbeidspro-

ductiviteit blijvend op een hoger niveau liggen, zal de productie op termijn terugkeren naar haar oorspronkelijke (fluctuerende) toestand.

Het is mogelijk in het Goodwin (1988, 1990)-model een blijvende groeitrend te genereren. Hiervoor moet de accumulatiefunctie (3.4.1) worden aangepast. Als we veronderstellen dat het verzadigingspunt afhankelijk is van de productie kan (3.4.1) geschreven worden als:

$$k_{t+1} = bk_t(1 - k_t/c(q)) \quad (3.4.5)$$

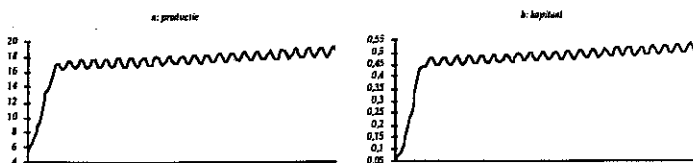
Waarin:

$$c(0) = c$$

$$c'(q) > 0$$

De productie wordt bepaald door de groei van de werkgelegenheid en de door de kapitaalaccumulatie veroorzaakte groei in de arbeidsproductiviteit. Verondersteld is dat de klassenstrijd resulteert in een stabiele gesloten band. Dit heeft tot gevolg dat de productie fluctueert. De veranderingen in de productie hebben tot gevolg dat de gewenste kapitaalvoorraad verandert: een stijging in de productie doet c stijgen, waardoor de accumulatie een extra impuls krijgt. Dit doet de arbeidsproductiviteit stijgen, waardoor de productie opnieuw stijgt. Omdat verondersteld is dat de productie fluctueert zal ook c fluctueren, wat tot gevolg heeft dat de groei cyclisch verloopt. De tijdspaden van de productie en de kapitaalvoorraad zijn in figuur 8a en 8b weergegeven.

Figuur 8: de cyclische groei van de productie en kapitaal



Ook dit model verklaart de initiële afwijking van de evenwichtssituatie niet, maar de groei die resulteert uit de oorspronkelijke schok is endogeen.

Een model dat een volledige weergave wil geven van de combinatie tussen de lange termijn groei en de korte termijn fluctuaties zal de innovaties endogeen moeten verklaren. Zoals blijkt uit historische beschrijvingen zijn altijd uitvindingen en verbeteringen aanwezig. Deze uitvindingen worden echter niet allemaal en direct toegepast in het productieproces. Een mogelijke verklaring kan liggen in een combinatie van het model van Foley (1987), die de accumulatie van te investeren gelden beschrijft en het model van Goodwin (1990), waarin de toepassing van de innovaties wordt beschreven.

5 Samenvatting en conclusies.

In het voorafgaande zijn een aantal modellen beschreven, die een verklaring geven voor het ontstaan van fluctuaties in de economie. De oorzaken van deze fluctuaties zijn in een aantal categorieën onder te brengen:

- het spaargedrag;
- de technologie;
- onvolledige concurrentie;
- de inkomensverdeling;
- de interactie reële-monetaire sfeer;
- de "animal spirits".

De originaliteit van de besproken benaderingen ligt niet in de oorzaken van de cycli of het gebruik van niet-lineaire vergelijkingen. Hiervan zijn andere voorbeelden te geven, zoals het spaar-investeringsmodel van Kaldor (Zie bijvoorbeeld Gabisch en Lorenz, 1989). Het nieuwe van de "chaos-benadering" ligt in het feit dat in deze modellen aangetoond wordt dat onregelmatige endogene fluctuaties mogelijk zijn. Hierdoor wordt het begrip "evenwicht" uitgebreid. Werd met evenwicht, weergegeven in een fase-diagram, oorspronkelijk een stabiel punt bedoeld, later is dit uitgebreid tot een stabiele cirkel. Met behulp van de logistische vergelijking is aan te tonen dat de evenwichtige situatie kan worden weergegeven door een vlak of band. Binnen dit "stabiele oppervlak" zijn alle punten evenwichtspunten, maar zij bewegen schijnbaar doelloos en onvoorspelbaar. Het is dan mogelijk met behulp van deterministische modellen schijnbaar willekeurige tijdreeksen te simuleren, zonder een beroep te hoeven doen op exogene schokken.

Anderzijds kent de chaotische benadering nog vele tekortkomingen. De gebruikte modellen, waarvan hier een aantal zijn gepresenteerd, zijn ad-hoc en de economische plausibiliteit is niet altijd even groot (bijvoorbeeld de terugbuigende offercurve in paragraaf 3.1). Daarnaast zijn slechts enkele niet lineaire vergelijkingen (zoals de logistische vergelijking) analytisch oplosbaar. Veel conclusies met betrekking tot het optreden van chaos zijn gebaseerd op simulaties. De analyses zijn hierdoor lokaal en de relevante waarden van de parameters niet onderbouwd. De gevoeligheid van de modeluitkomsten voor de gekozen startwaarden en parameters maakt toetsing moeilijk (of misschien onmogelijk). Daarnaast kan ook de mate van aggregatie van de data chaotisch gedrag verhullen (zie paragraaf 3.2). De conclusie van Blanchard en Fisher (1989) is dan ook: *"We are not at this stage convinced by either of these [last two] approaches"* (Blanchard en Fisher, 1989, 261). Anderzijds stelt Gleick (1987) dat de ontdekking van "chaos" de kijk van wetenschappers op de wereld radicaal zal veranderen.

Hier kan worden volstaan met de opmerking dat endogene terugkoppelingen van niet lineare aard kunnen leiden tot een gedrag van variabelen dat het werkelijke gedrag van die variabelen beter lijkt te beschrijven dan de tot nu toe gebruikte lineaire modellen. Misschien is het in de toekomst mogelijk om, zoals hetzelfde licht verantwoordelijk is voor de diversiteit in kleuren, de variatie in economische gebeurtenissen te beschrijven en verklaren met behulp van een (tijdsafhankelijk) niet lineaire beschrijving van de interactie tussen individuen, organisaties en groeperingen. Echter, voordat "chaos" ook

praktisch kan worden toegepast bij het voorspellen en adviseren zal nog veel economisch en mathematisch onderzoek nodig zijn.

Literatuur.

- Aiyagari, S.R., Economic Fluctuations Without Shocks to Fundamentals; Or, Does the Stock Market Dance to Its Own Music?, *Quarterly Review*, Federal Reserve Bank of Minneapolis, 1988 (winter), 8-24.
- Baumol, J. and J. Benhabib, Chaos: Significance, Mechanism, and Economic Applications, *Journal of Economic Perspectives*, 3-1 (winter 1989), 77-105.
- Benhabib, J. and G. Larque, On Competitive Cycles in Productive Economies, *Journal of Economic Theory* 45 (1988), 145-170.
- Bennassy, J-P, *Macroeconomics: An Introduction to the Non-Walrasian Approach*, London, 1986.
- Blanchard, O.J., S. Fisher, *Lectures on Macroeconomics*, Cambridge, 1989
- Brock, W. and C. Sayers, Is the Business Cycle Characterized by Deterministic Chaos?, *Journal of Monetary Economics* 22(1988), 71-90.
- Brunner, K., A.H. Meltzer, An Aggregative Theory for a Closed Economy, in J. Stein(ed.), *Monetarism*, Amsterdam, 1976.
- Butler, A., A Methodological Approach to Chaos: Are Economists Missing the Point?, *Review*, Federal Reserve Bank of St. Louis, 72-2 (1990), 36-48.
- Day, R. and W. Huang, *Bulls, Bears and Marketsheeps*, MRG Working Paper, M8822, Los Angeles, august 1989.
- Foley, D.K, Liquidity-profit rate cycles in a capitalist economy, *Journal of Economic Behavior and Organization*, 8(1987), 363-376.
- Foley, D.K., *Money, Accumulation and Crisis*, Chur, 1986.
- Franke, R. and W. Semmler, *Expectation Dynamics, Financing of Investment, and Business Cycles*, paper, Bremen/New York, december 1989.
- Gabisch, G. and H-W. Lorenz, *Business Cycle Theory*, Heidelberg 1989.
- Gleick, J., *Chaos, Making a New Science*, London, 1987.
- Goodwin, R.M, Predator-prey models, in Eatwell, J., M. Millgate, P. Newman, *The New Palgrave*, London, 1987, 936.
- Goodwin, R.M., *Chaotic Economic Dynamics*, EUI working paper 88/357, Florence, 1988.
- Goodwin, R.M., *Chaotic Economic Dynamics*, Oxford, 1990.
- Grandmont, J-M., On Endogenous Competitive Business Cycles, *Econometrica* 53-5 (1985), 995-1045.
- Haberler, G. von, *Prosperity and depression*, Geneva, 1939.
- Huang, W. and R. Day, *Chaotical Switching Bear and Bull Markets: the derivation of stock price distributions from behavioral rules*, MRG Working Paper, M8922, September 1989.
- Julien, B., Competitive Business Cycles in an Overlapping Generations Economy with Productive Investment, *Journal of Economic Theorie*, 46, 1988, 45-65.
- Kelsey, D., The economics of chaos or the chaos of economics, *Oxford Economic Papers*, 40, 1988, 1-31.

- King, R., C.I. Plosser (ed), Real Business Cycles, *Journal of Monetary Economics*, 21 2/3, 1988.
- Kuyn, Kim, *Equilibrium Business Cycle Theory in Historical Perspective*, Cambridge, 1988.
- Lucas, R.E., *Studies in Business-Cycle Theory*, Cambridge, 1985.
- Malinvaud, E., *The Theory of Unemployment Reconsidered*, Oxford, 1977.
- Ploeg, F. van der, Classical Growth Cycles, *Metroeconomica*, 37, 1985, 221-230.
- Reichlin, P., Equilibrium Cycles in an Overlapping Generations Economy with Production, *Journal of Economic Theory*, 40, 1986, 89-102.
- Scheinkman, J.A., Nonlinearities in economic dynamics, *The Economic Journal*, 100, 1990, 33-48.
- Semmler, W. *Competition, Instability and Non-linear Cycles*, 1986.
- Thompson, J.M.T., H.B. Stewart, *Nonlinear dynamics and chaos*, Chichester, 1987.
- Weddepohl, C. Overlapping Generations Models, an Introduction, in F. van der Ploeg (ed.) *Advanced Lectures in Quantitative Economics*, 249-313.
- Witteloostuijn, A. van and A. van Lier, *Chaotic Patterns in Cournot Competition*, Research memorandum, 90-002, Maastricht 1990.
- Zaslavsky, G.M., *Chaos in Dynamic Systems*, Chur, 1985.