

Over dynamische economische modellen

Claus Weddepohl

Rede uitgesproken bij het neerleggen van het ambt van hoogleraar in de Wiskundige Economie aan de Universiteit van Amsterdam op maandag 1 juli 2002.

1. Modellen

Mijn leeropdracht was de wiskundige economie. In de wiskundig economie gaan we er van uit dat economische problemen het best kunnen worden bestudeerd aan de hand van *wiskundige modellen*. Daarover ga ik het vandaag hebben, en wel meer in het bijzonder over dynamische aspecten van economische modellen. Ik heb het hierna over theoretische, niet over econometrische modellen, die gebaseerd zijn op empirische relaties tussen geaggregeerde variabelen. Die zijn volgens andere principes geconstrueerd.

De economische wetenschap gaat over een wereld, die economen "de economie" noemen. Daarin komen mensen en organisaties voor, "economische agenten" genoemd, die plannen maken over hoeveelheden, zoals consumptie, productie, investeringen, besparingen, enz. enz. De uitvoering van die plannen leidt tot acties, zoals aan- en verkopen. De plannen van de agenten zijn afhankelijk van zekere voor hen gegeven, maar via economische processen bepaalde grootheden, die ik verder prijzen zal noemen, maar die mede omvatten tarieven, rentevoeten, lonen, winsten en andere inkomens. Voor zekere specifieke waarden van die prijzen, zijn de plannen van alle economische agenten met elkaar in overeenstemming en kunnen ze (ongewijzigd) worden uitgevoerd. Een dergelijke toestand noemen we *evenwicht*. Economen hebben de gewoonte aan te nemen dat de reële economie zich bijna altijd in een evenwicht bevindt, wat nog al dubieus is, om redenen waarop ik hierna zal ingaan.

De economische wetenschap probeert te achterhalen, hoe die evenwichten er uit zien, en hoe ze tot stand komen. Daartoe probeert men allereerst inzicht te krijgen in de wijze waarop afzonderlijke plannen van producenten, consumenten en andere organisaties ontstaan. Uitgangspunt is dat de plannen van economische agenten, op basis van preferenties en technologieën, een best mogelijke keuze vormen uit de mogelijkheden die zich voordoen (in een voor hun gegeven situatie), ze optimaliseren dus. Traditioneel wordt dergelijk gedrag *rationeel* genoemd. Daarover gaan theorieën over consumenten en producenten en, hoewel die theorieën al tamelijk ingewikkeld zijn, wordt het daarna pas echt moeilijk: de samenhang van het geheel, waarbij ieders keuzemogelijkheden mede worden bepaald door de plannen van de anderen.

In een *wiskundig model* van het individuele gedrag en van de onderlinge verbanden, worden de onderdelen van de economie, i.h.b. de preferenties en de technologieën, gespecificeerd en de eigenschappen daarvan, zorgvuldig in de vorm van veronderstellingen vastgelegd, waarna de daarop gebaseerde conclusies op logisch consistente manier worden afgeleid. Dat geheel vormt een theorie. De bedoeling is dat het model een beschrijving geeft van economische verschijnselen in onze wereld.

Helaas worden de conclusies vaak losgekoppeld van de gemaakte overonderstellingen, zodat het lijkt dat het om algemene waarheden gaat.¹ Maar er bestaan nu eenmaal geen algemeen geldige economische theorieën, iets wat ook sommige economen eigenlijk niet willen weten.

Het gaat hier (in eerste instantie) om abstracte theoretische modellen, waarin geen getallen voorkomen en niet alleen de variabelen, maar ook de parameters door symbolen worden voorgesteld. Daarmee kan men theoretische analyses uitvoeren, dus nagaan welke interessante eigenschappen het model heeft. Men kan ze kwantificeren, door aan de parameters getalswaarden toe te kennen. Dan kan men er ook mee rekenen. Idealiter zou zo'n gekwantificeerd model de reële economie precies beschrijven, maar feitelijk komen we nooit verder dan grove benaderingen en simpele voorbeelden.

Sommige modellen of onderdelen daarvan zijn *constructies* van een hypothetische of van een ideale wereld, die in op essentiële punten van de echte wereld verschillen. Die dienen dan

- als eerste benadering bij de bestudering van een verschijnsel, en om de zaak te vereenvoudigen, of
- om inzicht te krijgen in een ideale oplossing van een probleem, ook als die in de praktijk niet realiseerbaar is,

¹ Zo gelden theorieën van vraag en aanbod zowel partieel als in het algemeen evenwicht, alleen onder de veronderstelling dat productie technologieën convex zijn, wat het optreden van schaalvoordelen uitsluit (vgl. [37]).

hoewel die soms toch worden misverstaan als handelend over de echte wereld,² zoals ruleconomieën, Lindahl evenwichten voor publieke goederen, overlappende generatiemodellen met twee generaties, complete markten of prijsvorming m.b.v. een auctioneer.

Economische processen spelen zich, als het leven van de mensen, af in de tijd. Weliswaar is tijd continu, maar economen verdelen de tijd meestal in discrete perioden, omdat continue variabelen moeilijker te hanteren en ook niet goed te interpreteren zijn. De economische agenten worden geacht in elke periode opnieuw plannen te maken en uit te voeren, waarbij de acties uit vorige perioden vast liggen. De plannen gaan niet alleen over de huidige periode (kortweg, vandaag), maar ook over toekomstige perioden (kortweg, morgen), maar leiden alleen vandaag tot acties, die mede dienen om de plannen van morgen te kunnen realiseren. De plannen voor vandaag leiden, laten we dat voorlopig even aannemen, tot een evenwicht voor vandaag, en leggen ook grootheden vast, die van belang zijn voor morgen, zoals sparen door consumenten en investeren door bedrijven. Die achtereenvolgende evenwichten vormen een tijdpad, waarvan elke component bestaat uit acties en prijzen.

De economische werkelijkheid is dus een dynamisch verschijnsel, want alle economische grootheden kunnen veranderen naarmate de tijd verstrijkt, waardoor de toestand van vandaag de toestand van morgen mede bepaalt. Dat vraagt dus om dynamisch modellen.

Of de plannen voor morgen kunnen worden gerealiseerd hangt af van wat er morgen zal gebeuren en dat is onzeker, want dat wordt pas morgen bepaald. Het gaat daarbij om twee verschillende vormen van onzekerheid:

- exogene onzekerheden: door de natuur bepaalde onzekere gebeurtenissen, die invloed hebben op economische processen, waarvan de weersgesteldheid het standaard voorbeeld is;
- endogene onzekerheden: de waarden van economische variabelen, die worden bepaald door economische processen (hiervoor prijzen genoemd).

De agenten moeten zich bij hun plannen baseren op verwachtingen over een onzekere toekomst, verwachtingen die niet enkelvoudig hoeven te zijn, maar die ook kunnen zijn gespecificeerd door een kansverdeling. *Dat betekent dat de toestand van vandaag mede bepaald wordt door de verwachtingen voor morgen.* Dat is een complicerende factor, eigen aan de sociale wetenschappen en niet aanwezig in de natuurwetenschappen. Wat er morgen zal worden gerealiseerd, wordt ook door die verwachtingen beïnvloed, want de acties van vandaag bepalen mede de *keuzemogelijkheden* van morgen.

² Je komt ook modellen tegen, waarbij je het gevoel hebt dat alleen de namen die aan de variabelen worden gegeven suggereren, dat ze over economie gaan, maar waarbij het verder niet duidelijk wat ze met economie te maken hebben.

Lange tijd is het probleem van verwachtingen in de economische theorie verwaarloosd:

- men presenteert modellen als tijdloos, dus zonder band met verleden of toekomst, of
- het gaat expliciet alleen over de korte termijn.

Maar meestal modelleert men een *stationaire economie*, waarin alle specificaties (de preferenties en de technologieën van steeds identieke agenten), inclusief de parameters, in de opeenvolgende perioden dezelfde blijven. Voor die stationaire economie formuleert men een *stationaire toestand* of *steady state*, een evenwicht dat in elke periode wordt herhaald, dus het tijdpad is stationair, d.w.z. constant. De beginsituatie is nu in elke periode dezelfde, en de plannen en acties zijn dus ook steeds dezelfde. Verwachtingen blijven daarmee impliciet en komen niet in de definitie voor. Wiskundig is dat geen probleem, integendeel het maakt de zaak juist eenvoudig. Met verwachtingen kun je de steady state op meerdere manieren interpreteren: met name als *naïeve verwachtingen*, d.w.z. iedereen verwacht terecht dat morgen is als vandaag, of als *perfect foresight*, d.w.z. de plannen zijn gebaseerd op verwachtingen die uitkomen (althans in modellen zonder exogene onzekerheid). Maar dat zijn eigenlijk interpretaties achteraf.

Er blijft evenwel een onopgelost probleem: als de economie in het begin niet in een steady state verkeert, hoe komt hij er dan? Vaak geloven economen dat dit vanzelf gaat en dat dat vanzelfsprekend is. Dat is in elk geval niet waar, mede omdat, ook in een stationaire economie, niet stationaire evenwichtspaden kunnen bestaan. Daarop kom ik nog terug.

Daarbij dient nog te worden opgemerkt, dat wat over steady states werd gezegd, met enige aanpassingen, ook geldt voor wat evenwichtige groei heet, waarbij sommige parameters, b.v. de bevolkingsomvang of de productiviteit, steeds met hetzelfde percentage toenemen, met als gevolg dat ook een aantal variabelen met een vast percentage zullen groeien, terwijl andere constant blijven. Ik beperk mij hierna tot stationaire economieën, maar wat daarover wordt gezegd, geldt mutatis mutandis ook voor evenwichtige groei.³

Die analyse van steady states wordt vaak aangevuld met *comparatieve statica*. In een gegeven model, hoort bij elke configuratie van de parameters een andere steady state. *Comparatieve statica* betekent nu dat men die verschillende steady states met elkaar vergelijkt. Het geloof van de economen houdt in, dat een steady state, na de exogene verandering van de parameters, ogenblikkelijk verspringt naar een andere steady state. Dat wordt niet altijd expliciet vermeld, maar uit de redeneringen en argumentaties van economen blijkt dat ze dat doen. Niettemin is dit *onzin*: bij de verschillende steady states horen verschillende niveaus van sommige economisch grootheden, zoals de voorraad fysieke kapitaalgoederen, de geldvoorraad of het schuldenniveau van economisch agenten, enz. Die kunnen niet ineens veranderen, maar overgang van de ene steady state naar de andere

³ Over economieën die niet stationair zijn en geen evenwichtige groei vertonen, bestaat weinig theorie.

kost tijd, waarin die grootheden langzaam veranderen, zodat de economie zich tijdelijk in geen van beide toestanden bevindt. Men geeft meestal wel toe, dat er een overgangperiode bestaat, maar neemt aan die overgang vanzelf gaat en snel. Er zijn hier voor geen overtuigende argumenten beschikbaar, behalve voor bijzondere situaties. Die overgang is een (niet lineair) dynamisch proces, en op wat daar allemaal kan gebeuren, daar op kom ik nog terug.

Wel leert ons de control theory dat het mogelijk is een weg te vinden van de ene toestand naar de andere, maar die eist besturing door een centrale agent, die het te volgen pad uitrekent en een aantal besturingsvariabelen (heel precies) instelt, en dat kan hij alleen als hij het model precies kent.⁴ Soms wordt toch gesuggereerd dat het vanzelf gaat.

In de jaren vijftig introduceerden Arrow [1] en Debreu [4] een slimme truc: *complete markten*. In hun Algemeen Evenwichtsmodel is er slechts één moment waarop transacties worden afgesloten en afgerekend, waaronder contracten voor de leverantie van goederen in de toekomst, die alleen worden uitgevoerd als zich een bepaalde onzekere gebeurtenis voordoet (contingent claims). Daarmee is alles in een keer geregeld en verdwijnt het probleem. Weliswaar blijft er onzekerheid over de toekomst, maar voor elke mogelijke gebeurtenis zijn contracten afgesloten en afgerekend. Aldus is met alle exogene onzekerheden rekening gehouden, en de endogene onzekerheden, de prijzen, zijn verdwenen door de vastgelegde contracten. Hiermee werd externe onzekerheid voor het eerst op consistente wijze gemodelleerd. Of de economie stationair is of niet, maakt hier overigens niets uit.

Helaas kan dit niet doorgaan voor een model van onze wereld, omdat zulke markten hier ontbreken, ook al bestaan er wel degelijk enige termijncontracten en kan men zich tegen sommige onzekerheden verzekeren. Ik zei "helaas", maar eigenlijk ben ik wel blij, dat ik de hapjes en de drank voor mijn vijf en zeventigste verjaardag, over tien jaar, conditioneel op mijn dan nog in het land der levenden bevinden, niet nu al hoeft te bestellen en te betalen. Trouwens, bij enig nadenken realiseer je je, dat er meer markten zouden moeten bestaan, dan er sterren aan de hemel staan. Lastig is ook dat mensen die nog geboren moeten worden, toch nu al hun bestellingen moeten plaatsen. Het gaat hier dus duidelijk om wat ik hiervoor een constructie heb genoemd.

We komen er dus niet onder uit: willen we ons niet beperken tot steady states, dan moeten we in onze modellen verwachtingen verwerken, dus onze agenten voorzien, niet alleen van preferenties en technologieën, maar ook van verwachtingsregels, die vast leggen hoe zij hun verwachtingen bepalen. Mede op basis hiervan worden plannen voor vandaag en morgen gemaakt, terwijl er alleen

⁴ Er wordt veel gewerkt met modellen die gebruik maken van dynamisch programmeren, met optimalisering over de tijd. Deze kunnen evenwel niet worden beschouwd als beschrijvende modellen.

markten zijn voor goederen van vandaag, eventueel aangevuld met contracten voor de nabije toekomst en verzekeringscontracten in geld tegen sommige exogene onzekerheden. Laten we nog maar blijven aannemen dat de markten voor de korte termijn steeds in evenwicht zijn. Dat worden *tijdelijke evenwichten* genoemd (zie [12,16]). Wat de zaak ingewikkeld maakt is, dat deze door het model beschreven tijdelijke evenwichten kunnen variëren met de verwachtingsregels, terwijl niet duidelijk is welke regels realistisch zouden kunnen zijn. Daardoor zijn algemene conclusies voor deze modellen moeilijk af te leiden.

De simpelste verwachtingsregel is: iedereen verwacht dat de relevante variabelen morgen dezelfde waarden zullen aannemen als vandaag (naïeve verwachtingen), of gisteren, of een gemiddelde daarvan over een aantal voorbije perioden. Als de economie zich in een *steady state* bevindt, is daar niets mis mee, want de verwachtingen komen uit. Maar buiten de *steady state* gaat dat niet meer op. Verwachtingen zullen niet precies of helemaal niet uitkomen, zodat de agenten zullen constateren dat ze, achteraf bekeken, gisteren niet de best mogelijke plannen hebben gekozen, en dat ze de gisteren gemaakte plannen voor vandaag en de verdere toekomst moeten herzien. Verwachtingen kunnen systematisch niet uitkomen, als de agenten voortdurend dezelfde voorspelfout maken. Men mag aannemen dat de verwachtingsregel dan zal worden herzien. Daar wordt soms de redenering aan vast geknoopt dat men de regel net zo lang zal blijven veranderen tot de verwachtingen correct worden. Zo'n quasi dynamisch argument komt men vaak tegen in de economie, maar het deugt niet, omdat men altijd kan blijven veranderen, zonder ooit het "juiste patroon" te vinden, want het aantal mogelijke patronen is niet eindig.

Om het verwachtingen probleem te omzeilen kwam men met de *rationele verwachtingen* (RV) hypothese, en deze verwachtingsregel heeft lange tijd een dominante rol gespeeld bij de theorievorming. Daarvan zijn twee varianten, een eenvoudige en een ingewikkelde. Beide vormen een generalisatie voor een economie met externe onzekerheid van de hiervoor besproken hypothese van *perfect foresight*. Maar *perfect foresight* werd tot dan toe toch meer gezien als een vereenvoudiging, als eerste benadering, die vroeg om verder gaande analyse, waaraan men evenwel niet toekwam.

Allereerst de eenvoudige variant, die men hoofdzakelijk in de macro economie aantreft. Daarmee maakte ik kennis toen ik in 1979⁵ een seminar had gegeven in Bonn, en in gesprek raakte met Martin Hellwig. Hij bracht mij met groot enthousiasme op de hoogte van de nieuwste ontwikkeling in de economie, de rationele verwachtingen hypothese, waarvan hij later een van de profeten is geworden. Die hypothese komt er op neer dat mensen hun plannen maken op basis van verwachtingen, die zijn afgeleid door middel van vooruitberekeningen met behulp van het economische model, en die gemiddeld zullen uitkomen: er

⁵ Maar het idee dateert al van 1961 [22].

blijft externe onzekerheid, maar die wordt meestal, (anders dan in de ingewikkelde variant) niet direct gemodelleerd, maar alleen indirect via de effecten op de relevante variabelen, waarvan de (statistische) verdeling bekend wordt verondersteld. Er kunnen geen systematische fouten meer worden gemaakt: fouten zijn altijd toevallig, en niet te vermijden. De eenvoudige variant van de rationele verwachtingen hypothese wordt gepresenteerd als de oplossing van het verwachtingenprobleem.

Ik begon destijds meteen te steigeren want ik vond het volstrekte onzin en ik ben dat altijd blijven vinden, terwijl vele anderen zich door deze, om allerlei redenen aantrekkelijke, hypothese hebben laten verleiden. Dat hangt samen met mijn interpretatie van economische modellen.

Als je een model(letje) maakt van een economie met optimaliserende agenten, en waarin de toekomst een rol speelt, dan kun je zonder probleem de veronderstelling toevoegen dat de door jou gecreëerde agenten in het door jou gecreëerde model, dit model, met inbegrip van de door jou gespecificeerde kansverdelingen, kennen en daarmee kunnen rekenen. Ze kunnen dan de toekomst binnen het model voorspellen, en daarop hun optimale beslissingen baseren. Zij rekenen dus de verwachte toekomstige prijzen gewoon uit, en de uitkomsten zijn gemiddeld correct. Dit eist een volledig en precies gekwantificeerd model. Dit is de grondslag van de rationele verwachtingen hypothese, hoewel die veronderstelling zelden meer als zodanig wordt expliciet gemaakt, maar als vanzelfsprekend wordt aangenomen.

Ik noem dat de *model maker's fallacy*. Als we een beschrijvend model maken van een economie, dan hopen we dat dit een beeld geeft van verschijnselen in de wereld, dus van het ware model van de echte wereld, aannemende dat zo'n model bestaat, dus dat de echte wereld in een model te vangen is. Een ding is absoluut zeker: God of de evolutie heeft ons niet uitgerust met kennis van het ware model, U en mij niet, en ook het CPB niet. Het zijn juist wij economen, die wanhopige pogingen doen om een glimp van het ware model op te vangen en zo een aantal verschijnselen te begrijpen en te verklaren. En als de mensen, econoom of niet, gedrag vertonen binnen dit ware model, dan kan het onmogelijk gebaseerd zijn op een grondige kennis van dit ware model.

Ook weten we dat onder economen geen consensus bestaat over één model dat het ware model het best benadert. Integendeel, er bestaan vele, vaak simpele, modellen en als je de RV hypothese loslaat op verschillende modellen, kun je verschillende resultaten krijgen. Vaak geloven modelbouwers in hun eigen model, denken dat alle mensen dat ook doen en dat ze dat model kennen en er mee kunnen rekenen en dat ze dus de door zijn model geïmpliceerde rationele verwachtingen zullen hebben. Het systeem zou alleen kunnen werken als alle agenten hetzelfde model zouden hanteren. Er is dan, wat in iets ander verband *common knowledge*⁶ (zie [8]) wordt genoemd: iedereen kent het model en weet

⁶ In [14] wordt het verband tussen common knowledge en rationele verwachtingen uitgewerkt.

dat iedereen het model kent en dat iedereen weet dat iedereen weet dat iedereen het model kent, enz.

Trouwens als het ware model bestaat, is het groot, dus het bevat zeer veel variabelen en vergelijkingen (eerder miljoenen dan tientallen), en is dus erg ingewikkeld. Als we voor een ogenblik aannemen dat het model wel bekend is, b.v. omdat een groter genie dan Einstein, of een hoger wezen, het heeft gevonden en gepubliceerd, dan kan hoogstens een geniale enkeling met een batterij super computers er de gewenste uitkomsten mee berekenen. En zeker kunnen de afzonderlijke agenten het niet uit hun blote hoofd!!⁷

Samenvattend: in het benaderende model neem je aan dat de agenten in het model het model kennen en er mee kunnen rekenen, terwijl in het ware model dat je ermee hoopt te benaderen, de agenten het model niet kennen, laat staan dat ze er mee kunnen rekenen. Dus als je in het benaderende model, dat zo simpel is dat er inderdaad wel mee kan worden gerekend, aanneemt dat de agenten dit ook doen, dan vormt dat in elk geval geen benadering van de werkelijkheid, en zijn de aldus verkregen resultaten niet relevant. Zo eenvoudig is dat.

In de macro-economie vindt men simpele modelletjes, waarvan gezegd wordt dat ze microfoundations hebben. Daarin komen een representatieve consument en een representatieve producent voor, gespecificeerd door geaggregeerde nuts- en productiefuncties, eventueel aangevuld met monetaire factoren en overheids-gedrag. Het lijken daarmee eenvoudige micromodellen, maar vanuit de micro theorie zijn deze representatieve agenten niet te funderen, behalve onder extreem onaannemelijke veronderstellingen,⁸ of achteraf. Zulke modellen staan veraf van het "ware" model en kunnen daarvan hoogstens grove benaderingen zijn. De variabelen zijn te interpreteren als gewogen gemiddelden van alle hoeveelheden en prijzen in de economie, en het model beschrijft slechts verbanden tussen deze gemiddelden. De consumenten en de producenten komen niet met een echte consument of producent overeen. Bij rationele verwachtingen moeten de echte agenten hun geaggregeerde representanten kennen.

Zoals ik hiervoor al opmerkte, is er ook een ingewikkelde variant, in de micro economie. Daarin gaat het om een rationele verwachtingen evenwicht, door Radner [24, p. 932] omschreven als een "evenwicht van plannen, prijzen en prijsverwachtingen". Externe onzekerheid is expliciet verwerkt, en de verwerving van informatie speelt een belangrijke rol. Het vormt een uitbreiding van het

⁷ Voor tentamens en opdrachten geef ik soms het formuleren en oplossen van simpele voorbeelden van zulke vergelijkingensystemen op, met slechts enkele variabelen, maar alleen de wat slimmere studenten kunnen dat foutloos, als ze de syllabus tenminste zorgvuldig hebben bestudeerd.

⁸ Gorman [11] bewijst dat aggregatie over consumenten alleen mogelijk is als alle Engel curven evenwijdige rechte lijnen zijn, wat betekent dat alle consumenten, eventueel na een transformatie van de oorsprong, dezelfde homothetische nutsfuncties hebben.

Arrow-Debreu model met complete merken. Als je Radner's artikel leest, is het duidelijk dat het om een constructie gaat, en dat in de wereld niet voldaan kan zijn aan de veronderstellingen die er aan ten grondslag liggen (zie [24, p. 930]), een constructie, die niet een beschrijving van de wereld bedoelt te zijn, maar van een hypothetische perfect werkende economie. Alleen al om het precies te formuleren is een ingewikkeld wiskundig gereedschap nodig (zoals maattheorie). In de eenvoudige variant is daar niet veel van over gebleven en voor de meeste gelovigen gaat het alleen om een rekentruc. En in eenvoudige macro modellen is de RV hypothese eenvoudig te formuleren.

De agenten in het *ware* model moeten hun beslissingen wel baseren op verwachtingen, maar die kunnen ze niet ontlenen aan manipulaties met het *ware* model. Dat moet dus ook het uitgangspunt zijn voor de modelmaker. Aldus construeren Evans en Honkapohja [6] eerst het (veronderstelde) *ware* model en daarnaast een ander, door de agenten voor hun verwachtingen gehanteerde model (the perceived law of motion). Deze genereren samen het tijdpad, een reeks tijdelijke evenwichten. In hun model hanteren zij geen vaste verwachtingsregels, maar deze worden aangepast op basis van realisaties, dus de agenten in het model *leren*.

Een dergelijke aanpak wordt tegenwoordig vaak "begrensd rationeel" (boundedly rational) genoemd, m.i. ten onrechte.

Het gebruik van de term "rationeel" in de economie is al heel oud: er wordt mee bedoeld dat economische agenten voor zichzelf doeleinden kunnen formuleren, en zich zo gedragen dat ze die doeleinden, zo goed mogelijk bereiken: optimaliserend gedrag. Consumenten kiezen overeenkomstig hun preferenties en producenten maximaliseren hun winst, op basis van gegevens die ze in principe kennen.

Optimaliseren is niet altijd eenvoudig. Vandaar dat in de vijftiger jaren Herbert Simon [28] (Nobelprijs 1987) het begrip *begrensd rationaliteit* introduceerde: Hij meende dat economische agenten zich, bij het vaststellen van hun plannen, beperken tot het zoeken van een oplossing die op een of andere manier bevredigend is (satisficing), omdat dat veel gemakkelijker is dan het vinden van de optimale oplossing, wat Selten [27] (Nobelprijs 1993) "non optimizing behaviour" noemt. Hoewel veel economen het daar eigenlijk wel mee eens zijn, is het idee toch niet aangeslagen, mijns inziens omdat optimaliseren leidt tot een beperkt aantal oplossingen, waar je verder mee uit de voeten kunt, terwijl de acceptabele suboptimale oplossingen een zo grote verzameling vormen, dat je er eigenlijk niet verder mee kunt werken, (tenzij je precies specificeert welke van de vele suboptimale mogelijkheden ze zullen kiezen). Desalniettemin zegt Selten [27, p.15] in een recent boek "I am convinced of the necessity of reconstructing microeconomics on the basis of a more realistic picture of economic decision making."

De laatste jaren is het geloof in RV aan het verlopen. Toen sommige aanhangers van RV gingen twijfelen, mede omdat bleek dat ook onder RV het "vreemde" gedrag, waarover ik het hierna ga hebben, mogelijk bleef, ontwikkelden ze modellen met minder alwetende agenten, en die agenten noemden ze "begrensd rationeel". Met begrensde rationaliteit, in de oorspronkelijke betekenis, heeft dat niets te maken, want optimaliserend gedrag blijft verondersteld (vgl. [27, p. 15]). Maar RV eist dat mensen eigenschappen hebben, die ze niet kunnen hebben. Ter vergelijking: als we er toe over zouden gaan van een "handicap" te spreken, als iemand geen ogen op zijn rug heeft, dan verliest het woord handicap zijn betekenis.

2. Niet lineaire dynamische systemen

Een dynamisch economisch model bestaat uit een stelsel differentiaal- of differentievergelijkingen. Dat wordt in de wiskunde een dynamisch systeem genoemd.⁹ Differentiaalvergelijkingen gaan over continue veranderingen in de tijd, differentievergelijkingen over discrete veranderingen. In de economie past men voornamelijk differentievergelijkingen toe: die specificeren hoe de toestand, d.w.z. de waarden van de variabelen, in een periode, de toestand in de volgende periode bepaalt. Aldus ontstaat, vanuit een gegeven begintoestand, een tijdpad, waarbij de toestand in elke nieuwe periode uit die van de vorige volgt. Als er toevallige verstoringen voorkomen, wordt het systeem stochastisch, maar daar zie ik hier verder van af.

Een dynamisch systeem dat over de tijd hetzelfde blijft, dus zowel de vorm van de relaties als de parameters veranderen niet, heet autonoom. Dat correspondeert met een stationaire economie. Uit de wiskunde weten we dat autonome niet lineaire dynamische systemen verschillende typen tijdpaden kunnen voortbrengen:

- Het systeem heeft een vast punt, een toestand waarbij het systeem dezelfde toestand in de volgende periode genereert. Zo'n vast punt noemt men ook een evenwicht en het correspondeert met de eerder besproken stationaire toestand.
- Ook kunnen er cyclische paden bestaan van zekere lengte, b.v. 5. Dat betekent dan dat vijf verschillende toestanden elkaar in vaste volgorde opvolgen, zodat elke 5 perioden dezelfde toestand optreedt.
- Dan zijn er chaotische paden. Ze lijken volkomen willekeurig en dezelfde toestand wordt nooit herhaald. Het pad is extreem gevoelig voor de begintoestand, waardoor het onvoorspelbaar wordt. De toestanden bewegen zich dan binnen een gebied, dat een *attractor* wordt genoemd.
- Tenslotte kan het systeem nog exploderen of imploderen: alle variabelen naderen tot oneindig of nul.

⁹ Een eenvoudige inleiding in dynamische systemen vindt men in [29] en een grondige analyse in [23].

Het optreden van cycli en chaos vat ik even samen als *grillig* gedrag, (Engels: erratic).

Een systeem kan, bij dezelfde parameters, meerdere evenwichten, cycli en chaotische paden tegelijk hebben. Waar het terecht komt hangt af van de begintoestand. Overigens kan grillig gedrag ook dicht bij een evenwicht blijven, zodat het daarvan niet al te sterk afwijkt (zie [9,10,32, Ch. 8]).

Evenwichten zowel als cycli van een dynamisch systeem kunnen stabiel of onstabiel zijn. Als een evenwicht stabiel¹⁰ is, dan convergeert het tijdpad vanuit bepaalde begintoestanden, naar het evenwicht: dit evenwicht wordt in de loop van de tijd steeds dichter benaderd, en het tijdpad blijft uiteindelijk in dat evenwicht, strikt genomen na een oneindig aantal perioden. Zo is een cyclus stabiel, als het tijdpad convergeert naar die cyclus. Is een evenwicht of een cyclus instabiel, dan wordt het nooit bereikt, en zelfs als het in het evenwicht begint, zal het tijdpad er bij de geringste verstoring vanaf bewegen, en convergeren naar een ander stabiel tijdpad, chaotisch worden of im/exploderen.

Bij kleine veranderingen in een parameter

- zullen sommige evenwichten en cyclische paden een beetje veranderen, andere kunnen verdwijnen en er kunnen nieuwe verschijnen; chaotische paden kunnen daarentegen volkomen anders gaan verlopen.
- de stabiliteit van de verschoven paden kan veranderen: stabiel wordt instabiel en omgekeerd. Zulke wisselingen worden bifurcaties genoemd.

Ik geef toe dat dit wel een zeer summiere inleiding in de theorie van de niet lineaire dynamische systemen is, maar daar moet U het vandaag mee doen.

Deze theorie dateert al uit de 19de eeuw, maar de laatste decennia is de ontwikkeling ervan in een stroomversnelling gekomen, vooral na de introductie van de pc. Daarmee kunnen eenvoudige systemen kunnen worden gesimuleerd, door de computer tijdpaden van willekeurige lengte te laten uitrekenen. Daardoor kan men zien hoe het werkt, terwijl men het grillige gedrag zichtbaar kan maken.

Tot voor kort waren alleen lineaire dynamische systemen goed begrepen. Maar die waren niet erg interessant, want economieën zijn niet lineair zijn en die systemen zijn weinig flexibel.

Jaren geleden deed ik onderzoek naar evenwichten in overlappende generatiemodellen. Dat was aanleiding een cursus te gaan geven voor het NAKKE [33]. Ik wilde toen niet alleen mijn eigen onderzoek behandelen, maar ook een overzicht geven van de stand van zaken in dit gebied. Zo maakte ik kennis met een aantal studies over overlappende generaties (b.v. [13]), waar de eerste economische toepassingen van de moderne theorie van de niet lineaire dynamica waren te vinden, met voorbeelden van chaos en cycli. Daar ben ik toen op doorgegaan, en wel met toenemend enthousiasme, nadat ik op een congres over chaos ontdekt

¹⁰ Stabiliteit hangt af van de eigenwaarden van de Jacobiaan van het systeem in het betreffende punt; zie b.v. [23].

had dat Cars Hommes, die ik daarvoor wel eens op de gang tegen kwam, een specialist was op dit gebied. Dat leidde ertoe dat we een gezamenlijk onderzoek-programma¹¹ formuleerden, rond niet lineaire dynamica.

Cars Hommes slaagde erin de omvang van dit programma ineens sterk uit te breiden, doordat hij een NWO-pioneer-subsidie wist te verwerven, die werd ondergebracht in zijn project CeNDEF.¹²

3. Dynamische systemen in de economie

Een economisch model met tijd, is formeel een dynamisch systeem. Tot voor betrekkelijk korte tijd vroegen economen zich alleen af of een *evenwicht* stabiel was. Over wat er kon gebeuren als dat niet het geval was, hadden ze eigenlijk geen idee. Onder zeer bijzondere veronderstellingen kon stabiliteit soms worden aangetoond. Vaak nam men gemakshalve maar aan dat die veronderstellingen geldig waren, waarmee de zaak was afgedaan.

Intussen bevat de recente literatuur talloze economische toepassingen van de niet lineaire dynamica. Het gaat vaak om simulaties met eenvoudige modellen, maar er komt ook steeds meer theoretische analyse.

Laten we uitgaan van een economisch model van een stationaire economie dat een stationaire toestand heeft, zonder externe onzekerheid als complicerende factor, want dat maakt het spreken er over meteen veel lastiger. Dit is nog geen dynamisch systeem. Daartoe moet het model worden gecompleteerd met een verwachtingsregel. Er zijn vele mogelijke specificaties, elk met zijn eigen dynamische systeem, waarvan de stationaire toestand van het oorspronkelijke model een vast punt kan, maar niet hoeft te zijn.

Dat is wel het geval voor *perfect foresight* als verwachtingsregel, en als modelbouwer kunnen we daarmee omgaan, en de consequenties ervan bestuderen. Maar de steady state is niet het enig mogelijke perfect foresight pad, ook cyclische en chaotische perfect foresight paden kunnen er in passen, en het pad kan exploderen of imploderen; dit laatste betekent dat het model van economisch gezichtspunt inconsistent wordt, en het niet verder door kan gaan. Waar men terecht komt hangt af van de begintoestand en van de stabiliteitseigenschappen. Over de stabiliteit van de steady state, waarvan we het bestaan veronderstelden, valt a-priori niets te zeggen en grillig gedrag blijft mogelijk.

In de steady state zijn naïeve verwachtingen en perfect foresight identiek. Dus ook onder naïeve verwachtingen is de stationaire toestand een vast punt in het bijbehorende dynamische systeem.¹³ Als dit vaste punt stabiel is, komen de

¹¹ Equilibrium, Expectations and Dynamics.

¹² Center for Nonlinear Dynamics in Economics and Finance.

¹³ Bij evenwichtige groei betekenen naïeve verwachtingen en perfect foresight dat wordt verwacht

verwachtingen niet uit, zolang dat evenwicht niet is bereikt, maar daarna wel. Maar er kunnen daarnaast andere steady states en grillige paden voorkomen, waarbij de verwachtingen er blijvend naast zitten.¹⁴

Natuurlijk zijn er vele andere verwachtingsregels te verzinnen, waarbij de verwachtingen op een of andere manier uit realisaties en verwachtingen uit het verleden worden afgeleid. Daarvoor geldt hetzelfde als voor naïeve verwachtingen en voor perfect foresight: a-priori kunnen alle verschijnselen die we over dynamische systemen kennen, voorkomen.

Als verwachtingen voortdurend niet uitkomen, dan ligt het voor de hand om te veronderstellen dat de agenten, hun verwachtingsregel zullen herzien, dus dat ze *leren* van hun ervaringen. Maar dan hoeft men niet in een stabiel systeem terecht te komen. Er kunnen nieuwe grillige paden ontstaan. Dan blijft niet alleen de toestand, maar ook de verwachtingsregel voortdurend veranderen.

Ik heb nog een complicerende factor verwaarloosd. Ik had het over één enkele verwachtingsregel, aannemende dat alle economische agenten in het model op dezelfde wijze hun verwachtingen bepalen. Maar waarom zou dat het geval zijn? Verschillende visies over de economie kunnen ertoe leiden, dat ieder zijn eigen regel heeft, anders gezegd: ieder heeft zijn eigen model van de economie, waarmee hij vooruitberekeningen uitvoert (heterogene verwachtingen). Dat maakt de zaak nog een graadje ingewikkelder (zie b.v. [3,31]).

Vooralsnog ontbreekt een algemene theorie om de hier besproken problemen aan te pakken. Men probeert er vat op te krijgen door te spelen met een veelheid van bekende economische theorieën. Een methode om dat te doen is om simulaties uit te voeren met eenvoudige modellen en verschillende verwachtingsregels. Op enkele voorbeelden uit onderzoek van mijzelf en van mensen uit mijn omgeving, zal ik hierna ingaan.

4. Enkele voorbeelden

Een centraal thema uit de wiskundige economie is het algemeen evenwicht. Dat is een toestand met prijzen, waarbij alle markten ruimen, dus vraag en aanbod op alle markten zijn gelijk. De eerste algemeen evenwichtsmodellen modellen werden geformuleerd en bestudeerd door Léon Walras aan het eind van de 19de eeuw.

Het eerste probleem dat zich daarbij voordoet is: bestaat zo'n evenwicht? Dat probleem werd in de vijftiger jaren definitief opgelost: onder zekere veronderstellingen bestaan er een of meer evenwichten.¹⁵ Daarmee is niet gezegd dat in de

dat de mate van *verandering* van de variabelen ten opzichte van de voorafgaande periode dezelfde blijft.

¹⁴ Convergentie is sowieso uitgesloten als de verwachtingsregel vanuit de evenwichtswaarden niet dezelfde waarden voorspelt.

¹⁵ Volgens de stelling van Debreu-Mantel-MasColell (zie [5]) is over het aantal evenwichten a-priori niets te zeggen.

werkelijkheid aan die veronderstellingen is voldaan, dus dat het in de werkelijkheid bestaat. Maar daar wil ik het vandaag niet over hebben.

Het tweede probleem is: als dat evenwicht bestaat, hoe komt het dan tot stand, dus hoe ontstaan de evenwichtsprijzen?¹⁶ Dat probleem is niet opgelost.¹⁷ Weliswaar spreekt de economische folklore over de door Adam Smith een enkele keer genoemde "invisible hand" en suggereert dat de zaak daarmee rond is, maar al vijftig jaar geleden schreef Koopmans (Nobelprijs 1975) in zijn *Three Essays* [20]: "the invisible hand is a little too invisible in the center of its activities", en dat is nog steeds zo. Wij missen een realistisch model dat de prijsvorming beschrijft. Je kan natuurlijk aannemen dat de economische agenten de evenwichtsprijzen gewoon uitrekenen, en de RV mensen draaien daar hun hand niet voor om, maar dat zou alleen kunnen als ze het model precies zouden kennen.¹⁸ Als evenwichtsprijzen niet zomaar uit de lucht vallen, moeten ze ontstaan in een dynamisch proces, als een model vormt voor een "prijsmechanisme". Met niet evenwichtsprijzen als uitgangspunt, moet dat, na een aantal stappen, evenwichtsprijzen doen ontstaan. De simpele redenering: als er geen evenwicht heerst, veranderen de prijzen net zo lang tot er wel evenwicht heerst, gaat niet op.

Walras formuleerde het *tâtonnement* proces. Dat is wat ik eerder een constructie heb genoemd. Die bestaat er uit dat een centrale agent, auctioneer genoemd, alle prijzen tegelijk en centraal vaststelt. Die vindt hij via een aanpassingsproces, dat vandaag als volgt zou werken: de auctioneer stelt beginprijzen vast en stuurt alle economische agenten een e-mail met een prijslijst; die antwoorden direct met een mail met de lijst van hoeveelheden (van elk goed), die ze bij die prijzen willen kopen of verkopen. De auctioneer telt alles op en verhoogt of verlaagt elke prijs al naar gelang de vraag groter dan wel kleiner is dan het aanbod, en mailt de nieuwe prijslijst rond. Opnieuw ontvangt hij lijsten met gewenste aan- en verkopen, en dat gaat net zo lang door tot alle markten ruimen. Er kan pas gehandeld worden als zo'n evenwichtsprijs is bereikt. Dit vormt een dynamisch systeem, waarbij de dynamiek wordt voortgebracht door de prijsveranderingen, niet door verwachtingen. Als het evenwicht stabiel is, zou het kunnen werken. Stabiliteit is aangetoond onder bepaalde veronderstellingen, maar of die in de werkelijkheid opgaan valt te betwijfelen.

Zelf [34] heb ik simulatiestudies uitgevoerd met dit model en daarbij bleek dat er zinnige voorbeelden zijn te geven waar elk van de hiervoor besproken mogelijkheden zich kan voordoen: convergentie, cycli, chaos, en in de laatste gevallen,

¹⁶ Zie hier over Hahn [15].

¹⁷ In mijn oratie [32], twintig jaar geleden heb ik het hier ook al over gehad, maar toen wist ik nog niets van niet lineaire dynamische systemen.

¹⁸ Er bestaan algorithmen, waarmee men evenwichtsprijzen kan uitrekenen. Het eerste werd ontworpen door Scarf [26] en later verfijnd o.a. door van de Laan en Talman [21]. Zulke algorithmen vormen weliswaar een dynamisch systeem, maar ze kunnen niet worden beschouwd als een model voor prijsvorming in de markt.

komt het dus nooit tot handel. Ook mijn promovendi Goeree [9] en Tuinstra [30] vonden voorbeelden van zeer complexe dynamica in het tâtonnementmodel. Kortom zelfs dit kunstmatige proces hoeft niet te werken. Dat zegt op zichzelf niets. Want een centrale agent die de alle prijzen zet, bestaat niet in onze wereld, en we kunnen niet eens concluderen dat dat jammer is.

Maar hoe zou een "prijsmechanisme" dan wel werken? Er bestaan in de literatuur een aantal aanzetten tot een meer realistisch model (b.v. [7]), maar een acceptabel resultaat is er niet. Zelf heb ik een serie dynamische systemen geconstrueerd [35], die iets minder onrealistische prijsaanpassingsprocessen beschrijven, met name zonder de bizarre eis dat er pas mag worden gehandeld als een evenwichtsprijs is ontstaan, maar met handhaving van de regel dat prijzen omhoog of omlaag gaan bij gebleken vraag- of aanbodoverschotten. En simulaties daarmee laten zien dat ook hierbij steeds alles mogelijk blijft, convergentie, cycli, chaos.

Hoewel het geloof in de werking van het prijsmechanisme tegenwoordig religieuze vormen aanneemt, kan ik alleen maar concluderen dat een wetenschappelijke basis daarvoor nog steeds ontbreekt.

In het tâtonnementproces spelen verwachtingen geen rol, wel in andere, meer realistische processen, want als eenmaal de prijzen aan het bewegen zijn, ontstaan er verwachtingen over de verdere beweging,¹⁹ zoals bekend is i.v.m. het verwante probleem van beurskoersen.

Een model met prijsverwachtingen is het z.g. spinnenwebmodel van een enkele markt, waar het aanbod van vandaag gisteren werd vastgesteld op basis van de gisteren verwachte prijs van vandaag. Dit model werd door Cars Hommes onderzocht in zijn proefschrift [17] en artikelen [18] en hij kon laten zien hoe daar cycli en chaos kunnen ontstaan, voor bepaalde typen vraag en aanbodfuncties met naïeve of adaptieve verwachtingen. In Hommes & Sorger [19] wordt ditzelfde model uitgewerkt, als illustratie van een geraffineerder type verwachtingsregel met een leerproces. De verwachte prijs van morgen wordt afgeleid uit de gerealiseerde prijzen van gisteren en eerder. De parameters van deze verwachtingsregel worden vastgesteld met behulp van econometrische schattingsmethoden, zodanig dat de gemiddelden en de autocorrelaties van de verwachtingen en de realisaties gelijk zijn. De ontstane paden worden een *consistent expectations equilibrium* genoemd. Die paden kunnen opnieuw de vormen aannemen die we al kennen: ze kunnen convergeren naar een steady state, zodat de verwachtingen correct worden voorspeld, ze kunnen cycli vertonen of uitmonden in chaos.

¹⁹ Als er wordt gehandeld tegen niet evenwichtsprijzen, dan moet er hoeveelheidsrestricties gelden. Dan kan de vraag in de volgende periode mede worden beïnvloed door verwachte latere hoeveelheidsrestricties; zie [36].

Verwachtingen spelen ook een rol in overlappende generatiemodellen. De eenvoudigste versie is een stationaire economie, gespecificeerd door een oneindige rij identieke generaties, die allemaal even lang leven en waarvan er ieder jaar een bijkomt en aan andere afsterft. Agenten die tegelijk leven kunnen met elkaar handelen. Iedereen streeft ernaar zijn levensinkomen, overeenkomstig zijn preferentie, optimaal over zijn leven te spreiden, door onderweg naar het einde te sparen en te ontsparen. Maar in een evenwicht over de tijd moeten die besparingen en ontsparingen van de verschillende generaties in elkaar passen. Er bestaan steady states, waarbij de prijzen (hier te interpreteren als rentevoeten), constant blijven. En wederom is de vraag, of zulke evenwichten bereikbaar zijn, of blijven bestaan.²⁰ Wie nog verder te leven heeft, maakt een plan over zijn handel in de huidige en in de volgende perioden, met dan levende, gedeeltelijk nog ongebooren agenten. Dat kan alleen op basis van verwachte prijzen, omdat die pas morgen tot stand zullen komen. De eerste economische toepassingen van niet lineaire dynamica, gaan over deze modellen, b.v. [13].

Ik heb simulaties [38] uitgevoerd met een simpele versie van dit model, bij verschillende verwachtingsregels. Allereerst perfect foresight, waarbij de prijs een periode vooruit wordt berekend, wat eigenlijk betekent dat de prijs van vandaag die van morgen bepaalt. Voor de modelbouwer komt dat neer op het oplossen van paar vergelijkingen. Vervolgens de verwachting dat prijs van morgen dezelfde zal zijn als die van vandaag of gisteren.

De resultaten zijn merkwaardig: perfect foresight loopt in de meeste gevallen mis, doordat het systeem ontploft. Dat systeem is zeer instabiel.²¹ Maar de stabiliteitseigenschappen bij naïeve verwachtingen zijn beter. Bij veel specificaties convergeert het systeem naar een steady state. Maar niet overal: bij sommige specificaties gaat het ook hier mis.

Opnieuw blijkt dat het idee dat perfect foresight, c.q. rationele verwachtingen (in de hier besproken context) leidt tot de bedoelde evenwichten, wat een van de redenen was om er aan te beginnen, niet klopt. De stabiliteit wordt er in het algemeen niet door versterkt, soms juist niet.

Ook Tuinstra vond in zijn proefschrift [30, Hfdst. 3] "perfect foresight-cycles en chaos" in een OG model. Hij bekeek ook leerprocessen [30, Hfdst. 4], waarbij de verwachtingsregel wordt aangepast. Soms werkt dat, soms niet, en de auteur concludeert [30, p. 113] "erratic dynamics cannot be dismissed by a higher degree of sophistication of the learning models"

Ik merkte eerder op dat wij niet weten wat voor verwachtingen echte mensen hebben. In de hiervoor besproken modellen en de simulaties daarmee specifi-

²⁰ Reeds bij de introductie van overlappende generatiemodellen liet Samuelson [25] zien dat een van de twee steady states in het twee-generatiemodel instabiel kan zijn.

²¹ De stationaire toestand vormt een zadelpunt (zie [23]).

ceerden de modelmakers niet alleen het model, maar tegelijk ook de verwachtingsregels.

Henk van de Velden, de eerste promovendus binnen het CeNDEF project, beperkte zich in zijn proefschrift [31] als modelmaker tot het specificeren van het model, en liet het vaststellen van de verwachtingen over aan proefpersonen, echte mensen dus. In het eerder besproken spinnenwebmodel, waarin de prijs van morgen afhangt van de vandaag verwachte prijs, en soms van een storingsterm, moesten de deelnemers aan het experiment, die het model niet kenden, de prijs van morgen voorspellen, waarbij hun verdiensten hoger waren, maarmate hun voorspellingen dichter lagen bij de realisaties. In een eerste type experiment, met een aantal varianten, moesten de proefpersonen in elke stap hun prijsverwachting doorgeven, in een ander type moesten ze een regel vaststellen, aangevende hoe een verwachte prijs uit voorgaande gerealiseerde en verwachte prijzen moest worden berekend, zodat de experimentator daarmee simulaties kon uitvoeren.

Het eerste wat opvalt, is dat de verschillende proefpersonen volstrekt verschillende regels hanteerden, van eenvoudige tot zeer gecompliceerde. De kwaliteit van hun voorspellingen liep sterk uiteen en daarmee hun verdiensten. Daardoor verschilden de gegenereerde paden ook sterk van elkaar. In sommige gevallen kwamen ze dicht bij de (stochastische) steady state, in de meeste gevallen weken ze sterk af. Ook cycli van verschillende lengten en niet convergente paden kwamen voor.

Daarmee ben ik aan het einde van deze rede gekomen. Ik heb geprobeerd U enig inzicht te geven in de problemen waarmee men te maken krijgt, als men recht wil doen aan het feit dat economische processen zich in de tijd afspelen. Sommige economen vinden dit soort exercities wel leuk, maar menen dat ze geen praktische betekenis hebben. Maar ik meen te constateren dat de tijdpaden die we in de realiteit zien, meer overeenkomst vertonen met sommige grillige paden die onze simulaties voortbrengen, dan de regelmaat die in veel theorie besloten ligt. Het ziet er naar uit dat een aantal vertrouwde opvattingen van economen aan herziening toe zijn.

Literatuur

- [1] Arrow, K.J. & G. Debreu, 1954, Existence of equilibrium in a competitive economy, *Econometrica*, 22, 265-290
- [2] Arrow, K.J. & M.D. Intriligator, 1982, Handbook of Mathematical Economics, I,II,III, North Holland, Amsterdam, New York, Oxford
- [3] Brock, W.A. & C.H. Hommes, Heterogeneous beliefs and routes to chaos in a simple asset pricing model, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 22, 1232-1274
- [4] Debreu, G., 1959, Theory of value, Wiley, New York

- [5] Debreu, G., 1959, Excess demand functions, *Journal of mathematical economics*, 1, 15-21
- [6] Evans, G.W. & S. Honkapohja, 2001, Learning and expectations in macroeconomics, Princeton University Press, Princeton, Oxford
- [7] Fisher, F.M., 1999, Disequilibrium and Stability, Part 1 in: Microeconomics, Essays in Theory and Applications, edited by M. P. Schinkel, Cambridge University Press, Cambridge
- [8] Geneakoplos, J., 1994, Common Knowledge, Ch. 40 in Aumann R. & S. Hart, Handbook of Game Theory 2, North Holland, Amsterdam, New York, 1437-1496
- [9] Goeree, J.K., 1997, Applications of discrete choice models, Tinbergen Institute Research Series no 135, Amsterdam
- [10] Goeree, J.K., C. Hommes & C. Weddepohl, 1998, Stability and complex dynamics in a Discrete Tâtonnement Model, *Journal of Economic Behavior and Organization*, 33, 395-410
- [11] Gorman, W.M., 1953, Community preference fields, *Econometrica*, 21, 63-80
- [12] Grandmont, J.M., 1982, Temporary General Equilibrium Theory, Chapter 19 in [2]
- [13] Grandmont, J.M., 1985, On Endogenous Competitive Business Cycles, *Econometrica*, 53, 995-1046
- [14] Guesnerie, R., 2002, Anchoring economic predictions in common knowledge, *Econometrica*, 70, 439-480
- [15] Hahn, F., 1982, Stability, Chapter 19 in [2]
- [16] Hicks, J.R., 1939, *Value and Capital*, Oxford University Press, London
- [17] Hommes, C.H., 1991, Chaotic dynamics in economic models: some simple case studies, Proefschrift, RUG
- [18] Hommes, C.H., 1994, Dynamics of the cobweb model with adaptive expectations and nonlinear supply and demand, *Journal of Economic Behavior and Organization*, 24, 315-335
- [19] Hommes, C.H. & G. Sorger, 1998, Consistent expectations equilibria, *Macroeconomic dynamics*, 2, 287-321
- [20] Koopmans, T.C., 1957, Three essays on the state of economic science, Mac Graw-Hill, New York
- [21] Laan, G. vd & A.A.J. Talman, 1987, Adjustment processes for finding economic equilibria, in : Laan, G. vd & A.A.J. Talman (eds.), Computation and modelling of economic equilibria, 85-123, North Holland, Amsterdam
- [22] Muth, J., 1961, Rational expectations and the theory of price movements, *Econometrica*, 29, 315-335
- [23] Palis, J & F. Takens, 1993, Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics and homoclinic bifurcations, Cambridge University Press, Cambridge
- [24] Radner, R., 1982, Equilibrium under uncertainty, Ch. 20 in [2]

- [25] Samuelson, P.A., 1958, An exact consumption loan model of interest with or without the social contrivance of money, *Journal of Political Economy*, 66, 467-482
- [26] Scarf, H., 1967, On the computation of equilibrium prices, Ch 8 in: W. Fellner e.a (eds.), *Ten economic studies in the tradition of Irving Fisher*, Wiley, New York
- [27] Selten, R., 2001, What is Bounded Rationality, Ch. 2 in: Gigenzer, G & R. Selten (eds.), *Bounded Rationality, the adaptive toolbox*, The MIT Press, Cambridge, Mass
- [28] Simon, H.E., 1957, *Models of Man*, Wiley, New York
- [29] Steward, I., 1989, *Does God play dice?*, Basill Blackwell, New York
- [30] Tuinstra, J., 1999, "Price dynamics in equilibrium models", Tinbergen Institute Research Series no 214, Amsterdam; ook: Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, London, 2000
- [31] Velden, H. v.d., 2001, An experimental approach to expectation formation in dynamic economic systems, Tinbergen Institute Research Series no 268, Amsterdam
- [32] Weddepohl, H.N., 1982, Ontwikkelingen in de theorie van het algemeen evenwicht, oratie UvA; ook: Developments in the theory of general equilibrium, *De Economist*, 131, 1983, 373-399
- [33] Weddepohl, H.N., 1990, Overlapping Generations Models, an Introduction, in: F. van der Ploeg (ed.), *Advanced lectures in quantitative economics*, Academic Press, London, 1990, 249-313
- [34] Weddepohl, H.N., 1995, A cautious price adjustment mechanism: chaotic behavior, *Journal of Economic Behavior and Organization*, 27, 293-300
- [35] Weddepohl, H.N., 1996, A simulation study of disequilibrium price dynamics, Ch. 15 in: Barnett, W.A., G. Gandolfo & C. Hillinger, *Dynamic Disequilibrium Modelling*, Cambridge University Press, 421-443
- [36] Weddepohl, H.N., 1999, Price adjustment models in a production economy, *Annals of Operations Research*, 89, 149-164
- [37] Weddepohl, H.N., 2001, Publiek monopolie blijft het goedkoopst, *Economisch Statistische berichten*, 86, 200-202
- [38] Weddepohl, H.N., Balanced equilibria in overlapping generations models: existence and stability for Ces utility functions, unpublished